円筒当てはめ問題の厳密解法

情報理工学系研究科　数理情報工学専攻　山田 郁生
指導教員　松井 知己 助教授

2006 年 2 月 9 日

1　序論

本論文では，最小包囲円筒問題に対する実装可能な厳密アルゴリズムを提案した．最小包囲円筒問題に対する既存の厳密解法は実装が困難である．また，近似解法は実装は可能であるが，高精度の解を得たい場合に有効性があるかどうかわからない．提案した手法は，(☆)「2 次元平面上において 3 次 (以下) 曲線を境界とする領域の積を求める問題」を繰り返し行うというものである．問題 (☆) は論文 [1] によって厳密に計算できることが示されている．したがって，提案したアルゴリズムは実装でき、実用性が高い．

2　記号の定義

記号	定義
$p_i, \boldsymbol{p}_i$	$\mathbb{R}^3$ 内の点とその座標を表す縦ベクトル．
P	$\mathbb{R}^3$ 内の n 個の点集合 $\{p_1, \ldots, p_n\}$．
l	$\mathbb{R}^3$ 内の直線．
$\mathbb{P}^2$	射影平面．
$[\boldsymbol{v}]$	ベクトル $\boldsymbol{v}\,(\neq \boldsymbol{0})$ の 0 以外の定数倍ベクトルすべての集合．$[\boldsymbol{v}] \in \mathbb{P}^2$ である．

3　最小包囲円筒問題

$\mathbb{R}^3$ 内において，直線 l と正の実数 r が与えられたとき，l からの距離が r である点全体の集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \mathrm{d}(l, \boldsymbol{x}) = r\}$ を円筒と定義し，(l, r) と表す．ここで，$\mathrm{d}(l, \boldsymbol{x})$ は直線 l と点 $\boldsymbol{x}$ の距離である．このとき，l を軸直線，r を円筒の半径と言う．直線 l は，l 上の 1 点 $\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{v}\,(\neq \boldsymbol{0})$ を用いて，$l = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}, \forall t \in \mathbb{R}\}$ と表すことができる．このとき，$\boldsymbol{v}$ を直線 l の方向ベクトルと言い，特に l が円筒の軸を表すとき，軸方向ベクトルと呼ぶ．また，$\boldsymbol{v}$ の 0 以外の定数倍のベクトル全体の集合を $[\boldsymbol{v}]$ と表し，直線 l の方向と言う．特に l が円筒の軸を表すとき，$[\boldsymbol{v}]$ を軸方向と呼ぶ．

$\mathbb{R}^3$ 内の点集合 $P = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ が与えられたとき，円筒 (l, r) に対して，l から P の任意の点までの距離が r 以下であるとき，(l, r) は P の包囲円筒であると言う．また，P の最小包囲円筒は，P の包囲円筒で半径が最小のものを言う．入力 $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ に対して，最小包囲円筒問題は以下のように定式化される．

$$
\begin{array}{rll}
\text{min.} & r & \\
\text{s.t.} & \mathrm{d}(l, \boldsymbol{p}_i) \leq r & 1 \leq i \leq n \\
 & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 & \\
 & \|\boldsymbol{v}\|^2 = 1 &
\end{array}
\tag{1}
$$

この問題は凸計画でない．したがって，最小包囲円筒を求めるために，局所最適解をすべて列挙し，半径最小のものを選ぶ，という操作を行う．局所最適解となる円筒を P の極小包囲円筒と呼ぶ．以下で定義される P の極小包囲円筒をすべて含む包囲円筒集合 $A = A_3 \cap A_4 \cap A_5$ を求めることを考える:

- A_3: 3 点で定められる P の極小包囲円筒全体．
- A_4: 4 点で定められる P の極小包囲円筒全体．
- A_5: 5 点で定められる P の包囲円筒全体．

ここで，3 点 $Q \subset P$ で定められる P の極小包囲円筒とは，Q の極小包囲円筒で P の包囲円筒となるものを言う．4 点 $Q \subset P$ で定められる P の極小包囲円筒とは，Q の 4 点をすべて通る Q の極小包囲円筒で， P の包囲円筒となるものを言う．また，5 点 $Q \subset P$ で定められる P の包囲円筒とは，Q の 5 点をすべて通る円筒で P の包囲円筒となるものを言う．5 点の場合，極小包囲円筒と記述しない理由は，$\mathbb{R}^3$ 内の 5 点を通る円筒が有限個に定まるからである．

3 点で定められる極小包囲円筒の軸方向は 3 点のうち 2 点を通る直線の方向として定まる．4 点で定められる極小包囲円筒の軸方向は，6 次と 3 次の非線形連立斉次方程式の解として定まる．また，5 点で定められる包囲円筒の軸方向は，3 次と 2 次の非線形連立斉次方程式の解として定まる．

P の最小包囲円筒は，単純には，以下のように求めることができる．

単純なアルゴリズム　P の任意の 3 点，または 4 点，ま

たは 5 点の組 Q に対して，Q が 3 点または 4 点ならば Q の極小包囲円筒を，Q が 5 点ならば Q の包囲円筒をすべて求める．求めた円筒の中で P の包囲円筒となり，かつ半径最小のものを求める．

非線形連立斉次方程式の解を求める計算時間を O(1) とすると，このアルゴリズムの計算時間が $O(n^6)$ である．

4 提案した厳密アルゴリズム

軸方向を固定したとき, 最小包囲円筒問題は, 最小包囲円問題になる．そこで,「軸方向を固定したとき最小包囲円筒の通る P の点集合が等しい」という同値関係 $\sim$ を考える．軸方向ベクトルを $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 1)^{\mathrm{T}}$ として，v_1v_2 平面を $\sim$ によって定義される同値類で分割した様子を図 1 に表す．この図を分割図と呼ぶ．分割図において，面積を持つ連結

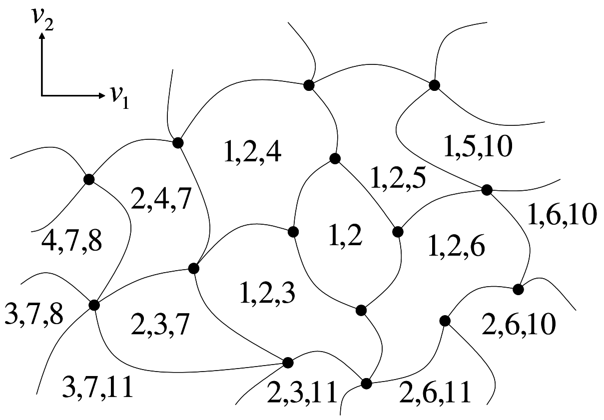

図 1 分割図．各面 s に割り振られた数字の組は，P_s に含まれる P の点の添え字集合を表す．

領域の内部を面，曲線分の両端点を除いた部分を辺，曲線分の端点を頂点と呼ぶ．分割図上の点 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 1)^{\mathrm{T}}$ に対して，軸方向を $[\boldsymbol{v}]$ に固定した最小包囲円筒は,

- $\boldsymbol{v}$ が面上にあるとき，2 点または 3 点を通る．
- $\boldsymbol{v}$ が辺上にあるとき，3 点または 4 点を通る．
- $\boldsymbol{v}$ が頂点のとき，4 点以上を通る．

P の極小包囲円筒に対して，以下の定理が成り立つ．

定理 軸方向ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 1)^{\mathrm{T}}$ に対して，軸方向を $[\boldsymbol{v}]$ に固定した P の最小包囲円筒が極小包囲円筒ならば，$\boldsymbol{v}$ は分割図上で頂点または辺上の 1 点となる．

この定理によって P の最小包囲円筒を求めるアルゴリズムを次のように設計できる．

提案したアルゴリズム P の任意の 2 点または 3 点の部分集合 Q に対して，v_1v_2 平面上における $\sim$ で定義された Q の同値類を表す領域を求める．求めた領域の境界上の極小包囲円筒を求め，暫定解 $r_{\min}$ より小さい半径のものが存在するならあ $r_{\min}$，$P_{\min}$，$\boldsymbol{v}_{\min}$ を置き換える．

ここで，$r_{\min}, P_{\min}, \boldsymbol{v}_{\min}$ はそれぞれ，アルゴリズムの過程で得られる暫定的な最小包含円筒の半径，最小包含円筒を通る点集合，軸方向ベクトルである．上記アルゴリズムにおいて，1 つの Q の同値類を表す領域を求めるための期待計算時間は $\forall\epsilon > 0$ に対して $O(n^{1+\epsilon})$ である [2]．これを $O(n^3)$ 回繰り返すので, 全体の期待計算時間は $O(n^{4+\epsilon})$ である．

5 実装結果

問題 (☆) を厳密に解くためのアルゴリズムは非常に複雑であり，現在，ライブラリを作成中である．したがって，厳密計算を伴わない実装を試みた．結果，単純なアルゴリズムに比べると提案したアルゴリズムは高速である．

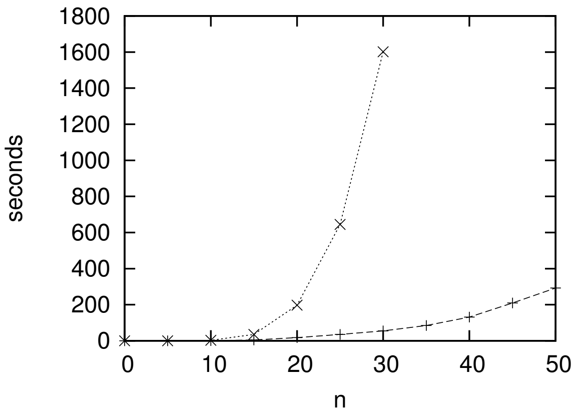

図 2 実装結果．×は単純なアルゴリズムの n に対する計算時間，＋は提案したアルゴリズムの n に対する計算時間である．

参考文献

[1] A. Eigenwillig, L. Kettner, E. Schömer, and N. Wolpert. Complete, exact, and efficient computations with cubic curves. In *Proceedings of the 20th ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 409–418, 2004.

[2] M. Sharir. Almost tight upper bounds for lower envelopes in higher dimensions. *Discrete & Computational Geometry*, Vol. 12, pp. 327–345, 1994.