

平成30年度
東京大学大学院情報理工学系研究科 コンピュータ科学専攻 入学試験問題
専門科目 I

平成29年8月21日
13:45 – 15:15

注意事項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開けないこと。
- (2) 3題すべてに答えよ。問題ごとに指定された解答用紙を使用すること。
- (3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

Specialized Subjects I

13:45 – 15:15, August 21, 2017

Entrance Examination (AY 2018)

Department of Computer Science, Graduate School of Information Science and Technology
The University of Tokyo

Notice:

- (1) Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
- (2) Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.
- (3) Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること。

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.
------	-----

問題 1

ダイクストラのアルゴリズムによって重み付き有向グラフの最短経路を求める問題について考える。グラフの頂点集合を V , 頂点数を $|V|$, 辺集合を E , 辺の数を $|E|$ とする。

以下の問いに答えよ。

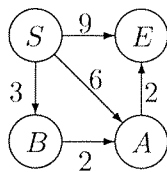
- (1) ダイクストラのアルゴリズムが正しく最短経路を求めないような入力データ ($|V| = 3$) の例を図示せよ。
- (2) 以下に始点 s から各頂点 v までの最短経路長 $c[v]$ を求める擬似コードを示す。空欄 a に当てはまるコードを答えよ。

```

Dijkstra( グラフ  $G = (V, E)$ , 始点  $s$ , 辺  $(u, v)$  の長さ  $d(u, v)$  ) {
   $c =$  空の配列;    $Q =$  空の集合;
  for (  $v \in V$  )
     $c[v] = \infty$ ;
   $c[s] = 0$ ;
  for (  $v \in V$  )
     $Q$  に  $v$  を追加する;
  while (  $Q \neq \emptyset$  ) {
     $v =$  頂点  $v \in Q$  のうち  $c[v]$  が最小のもの;
     $Q$  から  $v$  を削除する;
    for (  $u \in \{v$  からでている辺の行先  $\}$  )
      a
    ] ..... (ii)
  }
}

```

- (3) S を始点とする以下のグラフを考える。このグラフに対して上記のアルゴリズムを適用した場合、配列 c に格納された値が while 文の各反復においてどのように変化するか示せ。



- (4) 上に示した擬似コードのコード片 (i) および (ii) のそれぞれについて、アルゴリズムの全実行におけるそのコード片にかかる総時間を O 記法を用いて示せ。ただし、(i) のコード片を一回実行するのにかかる時間は $O(|V|)$ であるとする。
- (5) Q を優先度付き待ち行列 (2分ヒープ) にすることで、上記のアルゴリズムの計算量を減らすことができる。この場合について、上に示した擬似コードのコード片 (i) および (ii) のそれぞれについて、改良したアルゴリズムの全実行におけるそのコード片にかかる総時間を O 記法を用いて示せ。

Problem 1

Consider the problem of finding the shortest paths in a weighted directed graph using Dijkstra's algorithm. Denote the set of vertices as V , the number of vertices as $|V|$, the set of edges as E , and the number of edges as $|E|$.

Answer the following questions.

- (1) Depict an example input data (with $|V| = 3$) for which Dijkstra's algorithm does not correctly find the shortest paths.
- (2) Below is a pseudo-code of the algorithm that computes the length $c[v]$ of the shortest path from the start node s to each node v . Answer code to fill in the blank a.

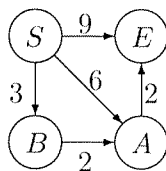
```

Dijkstra( graph  $G = (V, E)$ , start node  $s$ , length  $d(u, v)$  of each edge  $(u, v)$  ) {
     $c$  = an empty array;     $Q$  = an empty set;
    for (  $v \in V$  )
         $c[v] = \infty$ ;
     $c[s] = 0$ ;
    for (  $v \in V$  )
        add  $v$  to  $Q$ ;
    while (  $Q \neq \emptyset$  ) {
         $v =$  a vertex  $v \in Q$  that minimizes  $c[v]$ ;
        remove  $v$  from  $Q$ ;
        for (  $u \in \{\text{destinations of edges outgoing from } v\}$  )
            a
    }
}

```

] (i)
] (ii)

- (3) Consider the following graph with S as the start node. Show how the values stored in the array c change at each iteration of the while statement when the above algorithm is applied to the graph.



- (4) For each of the code fragments (i) and (ii) in the above pseudo-code, answer the total time spent in the code fragment during the whole run of the algorithm, using big O notation. Here assume that it takes $O(|V|)$ time to execute code fragment (i) once.
- (5) One can reduce the computational complexity of the algorithm by using a priority queue (binary heap) as Q . In that case, for each of the code fragments (i) and (ii) in the above pseudo-code, answer the total time spent in the code fragment during the whole run of the refined algorithm, using big O notation.

問題 2

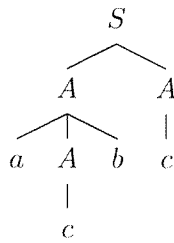
文脈自由文法 G によって生成される言語を $\mathcal{L}(G)$ と書く。また、語 w の長さを $|w|$ を書く。空列は ϵ と書くことにする。

以下の問いに答えよ。

- (1) 以下の生成規則からなる文脈自由文法を G_0 とする。

$$S \rightarrow AA \quad A \rightarrow c \quad A \rightarrow aAb.$$

ただし開始記号は S である。語 $acbc$ の G_0 による導出は、以下のような構文木によって表現できる。



語 $aacbbc$ の G_0 による導出を表す構文木を書け。

- (2) 問い (1) の文法 G_0 について、以下の 3 つの条件をすべて満たす語 $u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^*$ を求めよ。 (i) $uvwxy = acbc$, (ii) すべての $n \geq 0$ について $uv^nwx^n y \in \mathcal{L}(G_0)$, かつ (iii) $|vx| > 0$. ここで、 u, v, w, x, y のいずれかは空列 ϵ であってもよいことに注意せよ。
- (3) すべての文脈自由文法 G について、以下の性質を満たす整数 N が存在することを示せ。

すべての語 $z \in \mathcal{L}(G)$ について、 $|z| > N$ ならば以下の 4 つの条件をすべて満たす語 u, v, w, x, y が存在する。 (i) $uvwxy = z$, (ii) すべての $n \geq 0$ について $uv^nwx^n y \in \mathcal{L}(G)$, (iii) $|vx| > 0$, かつ (iv) $|vwx| \leq N$.

ただし、 G はチョムスキー標準形である、すなわち、すべての生成規則は $A \rightarrow BC$, $A \rightarrow a$, $S \rightarrow \epsilon$ (A は非終端記号, B, C は S 以外の非終端記号, a は終端記号, S は開始記号) のいずれかの形であると仮定してもよい。

- (4) 言語 $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ を生成する文脈自由文法は存在しないことを示せ。ただし問い (3) の結果を使ってもよい。

Problem 2

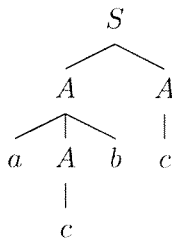
For a context-free grammar G , we write $\mathcal{L}(G)$ for the language generated by G . For a word w , we write $|w|$ for its length. We write ϵ for an empty word.

Answer the following questions.

- (1) Let G_0 be the context-free grammar consisting of the production rules:

$$S \longrightarrow AA \quad A \longrightarrow c \quad A \longrightarrow aAb,$$

where S is the start symbol. A derivation of $acbc$ in G_0 can be represented by the following syntax tree:



Draw a syntax tree that represents a derivation of $aacbbc$ in G_0 .

- (2) For the grammar G_0 in question (1), obtain words $u, v, w, x, y \in \{a, b, c\}^*$ that satisfy all of the following three conditions. (i) $uvwxy = acbc$, (ii) $uv^nwx^n y \in \mathcal{L}(G_0)$ for every $n \geq 0$, and (iii) $|vx| > 0$. Here, note that some of u, v, w, x, y may be empty words ϵ .
- (3) Prove that, for every context-free grammar G , there exists an integer N that satisfies the following property:

For every word $z \in \mathcal{L}(G)$, if $|z| > N$, then there exist words u, v, w, x, y that satisfy all of the following four conditions: (i) $uvwxy = z$, (ii) $uv^nwx^n y \in \mathcal{L}(G)$ for every $n \geq 0$, (iii) $|vx| > 0$, and (iv) $|vwx| \leq N$.

Here, you may assume that G is in Chomsky normal form, i.e., each production rule is one of the forms $A \rightarrow BC$, $A \rightarrow a$, and $S \rightarrow \epsilon$ (where A is a non-terminal symbol, B and C are non-terminal symbols other than S , a is a terminal symbol, and S is the start symbol).

- (4) Prove that there exists no context-free grammar that generates the language: $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$. You may use the result of question (3) above.

問題 3

以下ではアドレスが2ビット幅でデータが4ビット幅のSRAMを構成する。入出力を表す記号はいずれも0または1の値を取る1ビットの信号を表す。問題中のメモリセルは以下の仕様を満たすものとする。メモリセルは入力 I, W, S および出力 O を持ち、1ビットの値を記憶する。 W の立下りで、 I の値がメモリセルに記憶される。 S が1の間、 O には記憶された値が出力され、それ以外は0が出力される。以下の回路設計では特に指定されたもの以外に AND, OR, NOT, XOR ゲートを用いてよい。

以下の問いに答えよ。

- (1) 2ビットのデコーダを設計せよ。すなわち入力 A_0, A_1 と出力 B_0, B_1, B_2, B_3 を持ち、 B_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は $i = A_0 + 2A_1$ ならば1を出力し、それ以外ならば0を出力する。
- (2) アドレス i に格納されたデータの j ビット目に対応するメモリセルを V_{ij} とする ($i, j = 0, 1, 2, 3$)。メモリセルに値が格納されていると仮定し、値を読み出す回路を設計せよ。すなわち、入力 A_0, A_1 と出力 V_0, V_1, V_2, V_3 を持ち、 $A_0 + 2A_1 = i$ に対して V_{ij} に格納された値を V_j ($j = 0, 1, 2, 3$) に出力する。問い(1)で作成したデコーダを用いてよい。
- (3) 問い(2)で設計した回路にデータを書き込む機能を付け加えよ。入力 W_M, U_0, U_1, U_2, U_3 を加える。 W_M の立下りで、 $A_0 + 2A_1 = i$ に対して V_{ij} に U_j ($j = 0, 1, 2, 3$) の値を格納する。このときその他のメモリセルの値は維持する。なお、 W_M が1の間は A_0, A_1 の値は保持されて変わらないものと仮定せよ。問い(2)との差分だけ回答すればよい。

Problem 3

In this problem, we construct SRAM with 2-bit address width and 4-bit data width. All symbols for inputs and outputs represent 1-bit signals taking values of 0 or 1. We use memory cells with the following specifications. A memory cell has inputs I, W, and S and an output O, and stores a 1-bit value. At a falling edge of W, the value of I is stored in the memory cell. While S is 1, the stored value is output to O, and otherwise 0 is output to O. In your circuit designs, you can use AND, OR, NOT and XOR gates in addition to the specified ones.

Answer the following questions.

- (1) Design a 2-bit decoder. It should have inputs A_0 and A_1 , and outputs B_0 , B_1 , B_2 , and B_3 . B_i ($i = 0, 1, 2, 3$) outputs 1 if $i = A_0 + 2A_1$, and outputs 0 otherwise.
- (2) Let V_{ij} be the memory cell for the j -th bit of data stored in address i ($i, j = 0, 1, 2, 3$). Design a circuit to read the stored data, assuming that values are already stored in the memory cells. The circuit has inputs A_0 and A_1 , and outputs V_0 , V_1 , V_2 , and V_3 . If $A_0 + 2A_1 = i$, then the value stored at V_{ij} is output as V_j ($j = 0, 1, 2, 3$). You can use the decoder designed in question (1).
- (3) Add the functionality of storing data to the circuit designed in question (2). Inputs W_M , U_0 , U_1 , U_2 , and U_3 should be added. At a falling edge of W_M , the value of U_j is stored in the memory cell V_{ij} ($j = 0, 1, 2, 3$) for $A_0 + 2A_1 = i$. In this case, the other memory cells keep the stored values. Assume that the values of A_0 and A_1 are kept unchanged while W_M is 1. You may answer only the differences from your answer to question (2).