

平成25年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題
専門科目 II

平成25年2月6日
13:30 – 16:00

注意事項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開けないこと。
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
- (2) 3題すべてに答えよ。問題ごとに指定された解答用紙を使用すること。
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.
- (3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。
Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること。

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.
------	-----

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.

問題 1

n 次ベジエ曲線 $C^n(t)$ は, パラメータ $t \in [0, 1]$ において, 制御点列 P_k ($k = 0, 1, \dots, n$) により,

$$C^n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k P_k$$

のように表現される. ただし $\binom{n}{k}$ は二項係数であり, 区別できる n 個のものから k 個を選ぶ組み合わせの数を表し, $k = 0$ のとき $\binom{n}{k} = 1$, $k < 0$ または $n < k$ のとき $\binom{n}{k} = 0$ であるとする. 以下の問いに答えよ.

(1) 3 次ベジエ曲線 $C^3(t)$ を, t と P_0, P_1, P_2, P_3 を用いて表せ.

(2) 3 次ベジエ曲線の端点における接ベクトル $\frac{dC^3}{dt}(0), \frac{dC^3}{dt}(1)$ を, P_0, P_1, P_2, P_3 を用いて表せ.

(3) 以下の式が成り立つことを示せ.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (*)$$

(4) いま, 制御点列 P_0, P_1, P_2 により構成される 2 次ベジエ曲線 $C_a^2(t)$ と, 制御点列 P_1, P_2, P_3 により構成される 2 次ベジエ曲線 $C_b^2(t)$ を考える. 制御点列 P_0, P_1, P_2, P_3 により構成される 3 次ベジエ曲線 $C^3(t)$ を, $C_a^2(t)$ と $C_b^2(t)$ を用いて表せ. ただし, 式 (*) はすでに示されているものとして用いてよい.

(5) 制御点列 P_0, P_1, P_2, P_3 により構成される 3 次ベジエ曲線 $C^3(t)$ を, $t = t_0$ で 2 つに分割したとき, 分割された 2 つの曲線も 3 次ベジエ曲線となる. 分割された 2 つの曲線のうち, $t \in [0, t_0]$ に対応する 3 次ベジエ曲線の 4 つの制御点 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 はそれぞれ順番に

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_0 \\ Q_1 &= (1-t_0)P_0 + t_0P_1 \\ Q_2 &= (1-t_0)^2P_0 + 2(1-t_0)t_0P_1 + t_0^2P_2 \\ Q_3 &= (1-t_0)^3P_0 + 3(1-t_0)^2t_0P_1 + 3(1-t_0)t_0^2P_2 + t_0^3P_3 \end{aligned}$$

となることを示せ.

Problem 1

A Bezier curve $\mathbf{C}^n(t)$ of degree n can be represented as

$$\mathbf{C}^n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k \mathbf{P}_k$$

by using a parameter $t \in [0, 1]$ and control points \mathbf{P}_k ($k = 0, 1, \dots, n$). Here $\binom{n}{k}$ represents a binomial coefficient, which is the number of the combinations of k elements out of n distinct elements. It is defined as $\binom{n}{k} = 1$ for $k = 0$, and $\binom{n}{k} = 0$ for $k < 0$ or $n < k$. Answer the following questions.

- (1) Represent a Bezier curve $\mathbf{C}^3(t)$ of degree 3 by using t , \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and \mathbf{P}_3 .
- (2) Represent the tangent vectors of a Bezier curve of degree 3 at the end points, $\frac{d\mathbf{C}^3}{dt}(0)$ and $\frac{d\mathbf{C}^3}{dt}(1)$, by using \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and \mathbf{P}_3 .
- (3) Show that it holds

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (*)$$

- (4) Let $\mathbf{C}_a^2(t)$ be the Bezier curve of degree 2 defined by the control points \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , and \mathbf{P}_2 ; and $\mathbf{C}_b^2(t)$ be the Bezier curve of degree 2 defined by the control points \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and \mathbf{P}_3 . Suppose further that $\mathbf{C}^3(t)$ is the Bezier curve of degree 3 defined by the control points \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and \mathbf{P}_3 . Represent $\mathbf{C}^3(t)$ in terms of $\mathbf{C}_a^2(t)$ and $\mathbf{C}_b^2(t)$. Here you can use the equation (*).
- (5) Let $\mathbf{C}^3(t)$ be the Bezier curve of degree 3 defined by the control points \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , and \mathbf{P}_3 . When we split $\mathbf{C}^3(t)$ into two parts at $t = t_0$, each of the two curves is also a Bezier curve of degree 3. Let \mathbf{Q}_0 , \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 , and \mathbf{Q}_3 be the four control points of the Bezier curve corresponding to $t \in [0, t_0]$. Show that they satisfy

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{P}_0, \\ \mathbf{Q}_1 &= (1-t_0)\mathbf{P}_0 + t_0\mathbf{P}_1, \\ \mathbf{Q}_2 &= (1-t_0)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t_0)t_0\mathbf{P}_1 + t_0^2\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{Q}_3 &= (1-t_0)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t_0)^2t_0\mathbf{P}_1 + 3(1-t_0)t_0^2\mathbf{P}_2 + t_0^3\mathbf{P}_3. \end{aligned}$$

問題 2

非負整数 x, y に対して, アッカーマン関数 $a(x, y)$ は次のように定義される.

$$a(x, y) = \text{if } x = 0 \text{ then } y + 1 \text{ else } (\text{if } y = 0 \text{ then } a(x - 1, 1) \text{ else } a(x - 1, a(x, y - 1)))$$

これに似た関数 $f(x, y, z)$ を, 非負整数 x, y, z に対して次のように定義する.

$$f(x, y, z) = \text{if } (x = 0 \text{ or } y = 0 \text{ or } z = 0) \text{ then } x + y + z \\ \text{else } f(x - 1, f(x, y - 1, z), f(x, y, z - 1))$$

以下の問いに答えよ.

- (1) 任意の非負整数 x, y, z に対して $f(x, y, z)$ の値が定義されることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.
- (2) 任意の非負整数 x, x', y, y' に対して, 次を示せ.
 - (a) $y \leq y'$ ならば $a(x, y) \leq a(x, y')$.
 - (b) $x \leq x'$ ならば $a(x, y) \leq a(x', y)$.
- (3) 任意の非負整数 x, y, z に対して,

$$f(x, y, z) \leq \frac{a(x + 2, y + z)}{2}$$

が成り立つことを示せ.

Problem 2

For nonnegative integers x and y , the Ackermann function $a(x, y)$ is defined as follows.

$$a(x, y) = \text{if } x = 0 \text{ then } y + 1 \text{ else } (\text{if } y = 0 \text{ then } a(x - 1, 1) \text{ else } a(x - 1, a(x, y - 1)))$$

Let us define a similar function $f(x, y, z)$ as shown below, for nonnegative integers x, y and z .

$$f(x, y, z) = \text{if } (x = 0 \text{ or } y = 0 \text{ or } z = 0) \text{ then } x + y + z \\ \text{else } f(x - 1, f(x, y - 1, z), f(x, y, z - 1))$$

Answer the following questions.

- (1) Prove the following using induction: for any nonnegative integers x, y and z , the value $f(x, y, z)$ is well-defined.
- (2) Let x, x', y and y' be arbitrary nonnegative integers. Prove the following.
 - (a) $y \leq y'$ implies $a(x, y) \leq a(x, y')$.
 - (b) $x \leq x'$ implies $a(x, y) \leq a(x', y)$.
- (3) Prove that, for any nonnegative integers x, y and z , we have

$$f(x, y, z) \leq \frac{a(x + 2, y + z)}{2} .$$

問題 3

文字列をビット列で符号化することを考える。

- (1) 3種の文字 a,b,c からなる文字列について以下の5通りの符号化 (i...v) を考える。それぞれの符号化について、任意の文字列を符号化したビット列から一意に元の文字列を復元できるか、答えよ。また、復元できる場合にはその根拠を、復元できない場合には反例を示せ。

	i	ii	iii	iv	v
a	10	1	10	1	110
b	101	10	11	10	10
c	001	01	01	100	101

- (2) 5種類の文字 a,b,c,d,e からなる文字列を符号化することを考える。各文字を固定長符号でビット列に符号化するためには1文字を表すのに最低何ビット必要か。
- (3) 効率の良い可変長符号化手法としてハフマン符号がある。5種類の文字 a,b,c,d,e が出現確率 0.35, 0.25, 0.2, 0.15, 0.05 で独立に出現するときの、2進数のハフマン符号を求めよ。過程も図示せよ。
- (4) 上記のハフマン符号によって符号化した際の1文字あたりの平均ビット長を求めよ。
- (5) ハフマン符号化を行うアルゴリズムの疑似コードを示せ。ただし、文字の集合を Σ , 各文字 c の出現確率を $p(c)$ とする。

Problem 3

Consider the problem of encoding a character sequence into a bit sequence.

- (1) Consider the following five possible encodings (i..v) of a character sequence consisting of three characters (a, b, c). For each encoding, answer whether it is possible to uniquely reconstruct the original character sequence from a bit sequence that encodes a character sequence. In addition, explain the reason when it is possible, or give a counterexample when it is impossible.

	i	ii	iii	iv	v
a	10	1	10	1	110
b	101	10	11	10	10
c	001	01	01	100	101

- (2) Consider the encoding of a character sequence consisting of five characters (a, b, c, d, e). Answer the minimum number of bits per character required for the encoding when using a fixed length binary code.
- (3) Huffman code is known as an efficient variable length encoding scheme. Give a Huffman code for a character sequence consisting of 5 characters (a,b,c,d,e), which occur independently with probabilities 0.35, 0.25, 0.2, 0.15, and 0.05. Explain the process using figures.
- (4) Give the average bit length per character encoded using the Huffman code given in the previous question.
- (5) Show pseudo code for computing a Huffman code. Represent the set of characters with Σ and the probability of occurrence of a character c with $p(c)$.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.