平成24年度

東京大学大学院情報理工学系研究科

コンピュータ科学専攻

入学試験問題

数学

平成24年2月7日

10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開けないこと．
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 2題すべてに答えよ．問題ごとに指定された解答用紙を使用すること．
Answer the following 2 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること．

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

自然数 $k \geq 0$ に対し，正方行列 H_k を次により再帰的に定義する．

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad H_{k+1} = \begin{bmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) H_3 を求めよ．

(2) $H_k^\top H_k = nI_n$ であることを証明せよ．ただし $H_k^\top$ は H_k の転置行列を表す．また $n = 2^k$ とし，I_n は $n \times n$ の単位行列とする．

(3) 列ベクトル $\vec{h_1}, \vec{h_2}, \ldots, \vec{h_8}$ を，

$$H_3 = \begin{bmatrix} \vec{h_1} & \vec{h_2} & \ldots & \vec{h_8} \end{bmatrix}$$

となるように定める．列ベクトル $\vec{f}$ を

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \\ -8 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

とするとき，$\vec{f}$ を $\vec{h_1}, \vec{h_2}, \ldots, \vec{h_8}$ の線形結合で表せ．

Problem 1

For each natural number $k \geq 0$, we recursively define a square matrix H_k by the following.

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad H_{k+1} = \begin{bmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{bmatrix}$$

Answer the following questions.

(1) Find the matrix H_3.

(2) Let $n = 2^k$; prove that $H_k^\top H_k = nI_n$. Here I_n is the $n \times n$ identity matrix, and $H_k^\top$ is the transpose of H_k.

(3) Let column vectors $\vec{h_1}, \vec{h_2}, \ldots, \vec{h_8}$ be such that

$$H_3 = \begin{bmatrix} \vec{h_1} & \vec{h_2} & \ldots & \vec{h_8} \end{bmatrix}.$$

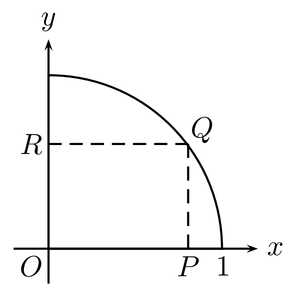
Let a column vector $\vec{f}$ be

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \\ -8 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Represent $\vec{f}$ as a linear combination of $\vec{h_1}, \vec{h_2}, \ldots, \vec{h_8}$.

問題 2

二次元直交実座標平面上の点



$$O=(0,0)\ ,\quad P=(a,0)\ ,\quad Q=(a,b)\ ,\quad R=(0,b)$$

を考える．ただし $a^2+b^2=1$ かつ $b\geq 0$ とする．a の確率密度関数が

$$f(a)=\begin{cases}1 & (0<a<1)\\ 0 & (\text{その他の領域})\end{cases}$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．

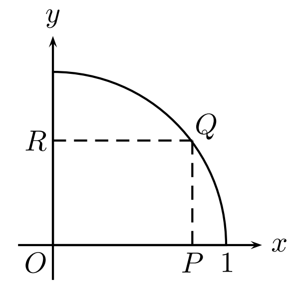
(1) a の期待値および分散を求めよ．

(2) 長方形 $OPQR$ の面積の期待値を求めよ．

(3) b の確率密度関数 $g(b)$ を求めよ．

(4) b の期待値を求めよ．

Problem 2



Let O, P, Q, R be points on a plane. Their coordinates are

$$O = (0, 0) \ , \quad P = (a, 0) \ , \quad Q = (a, b) \ , \quad R = (0, b)$$

in a two dimensional Cartesian system, with $a^2 + b^2 = 1$ and $b \geq 0$. Assume the probability density function of a is given by the following.

$$f(a) = \begin{cases} 1 & (0 < a < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Answer the following questions.

(1) Find the expected value of a, and the variance of a.

(2) Find the expected value of the area of the rectangle $OPQR$.

(3) Find $g(b)$, the probability density function of b.

(4) Find the expected value of b.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.