

平成24年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題
専門科目 II

平成24年2月8日
13:30 – 16:00

注意事項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開けないこと。
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
- (2) 3題すべてに答えよ。問題ごとに指定された解答用紙を使用すること。
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.
- (3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。
Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること。

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.
------	-----

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.

問題 1

実数のペア (x_i, v_i) の列 $((x_1, v_1), (x_2, v_2), \dots, (x_n, v_n))$ を考える. ただし x_1, x_2, \dots, x_n は互いに異なるものとする.

以下の問いに答えよ.

- (1) $1 \leq i \leq j \leq n$ として, $P_{i,j}(x)$ を $P_{i,j}(x_k) = v_k$ ($i \leq k \leq j$) を満たす $j-i$ 次多項式とする.

$$P_{i,j}(x) = \frac{(x-x_i)P_{i+1,j}(x) - (x-x_j)P_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} \quad \text{ただし } 1 \leq i < j \leq n$$

となることを示せ.

- (2) $C_{i,j}$ を $P_{i,j}(x)$ の最高次係数とする.

$$C_{i,j} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j-1}}{x_j - x_i} \quad \text{ただし } 1 \leq i < j \leq n$$

となることを示せ.

- (3) j 次の多項式 $R_j(x)$ を

$$R_j(x) = \prod_{i=1}^j (x - x_i)$$

で定義する. ただし $R_0(x) = 1$ である. 問い (2) の式を用いて,

$$P_{1,n}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j R_j(x)$$

が $P_{1,n}(x_i) = v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を満たすような c_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) を求めるアルゴリズムを示せ.

- (4) (x_1, x_2, x_3) と (c_0, c_1, c_2, c_3) および x が与えられたとき, 加算 3 回, 減算 3 回, 乗算 3 回で $P_{1,4}(x)$ を計算する式を示せ.

Problem 1

Let $((x_1, v_1), (x_2, v_2), \dots, (x_n, v_n))$ be a sequence of pairs (x_i, v_i) of real numbers. We assume that the numbers x_1, x_2, \dots, x_n are distinct.

Answer the following questions.

- (1) Let $1 \leq i \leq j \leq n$, and $P_{i,j}(x)$ be a polynomial of degree $j - i$ such that $P_{i,j}(x_k) = v_k$ ($i \leq k \leq j$). Prove that, for each i, j such that $1 \leq i < j \leq n$,

$$P_{i,j}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1,j}(x) - (x - x_j)P_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} .$$

- (2) Let $C_{i,j}$ be the leading coefficient of $P_{i,j}(x)$. Prove that, for each i, j such that $1 \leq i < j \leq n$,

$$C_{i,j} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j-1}}{x_j - x_i} .$$

- (3) We define $R_j(x)$, a polynomial of degree j , by

$$R_j(x) = \prod_{i=1}^j (x - x_i) .$$

We set $R_0(x) = 1$. Present an algorithm that calculates c_j ($j = 0, 1, \dots, n - 1$) such that

$$P_{1,n}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j R_j(x)$$

satisfies $P_{1,n}(x_i) = v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). You may use the formula in Question (2).

- (4) Assume that (x_1, x_2, x_3) , (c_0, c_1, c_2, c_3) and x are given. Present a formula for calculating $P_{1,4}(x)$ in which you can use: addition three times, subtraction three times, and multiplication three times.

問題 2

Σ を空でない集合 (文字の集合, アルファベット) とし, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ とする. 関数 $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma_0^*$ を次のように定義する: $f(w)$ は, 文字列 $w \in \Sigma^*$ において Σ_0 以外の文字を消去して得られる文字列である.

Σ 上の正規言語の間関係 \sim を次により定義する.

$$L_1 \sim L_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \{f(w) \mid w \in L_1\} = \{f(w) \mid w \in L_2\}$$

また, Σ 上の正規言語の間関係 \equiv を次により定義する.

$$L_1 \equiv L_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } w_1 \in \Sigma^* \text{ に対してある } w_2 \in \Sigma^* \text{ が存在して,} \\ f(w_1) = f(w_2), \quad \{f(v) \mid w_1 v \in L_1\} = \{f(v) \mid w_2 v \in L_2\}; \\ \text{かつ, 任意の } w_2 \in \Sigma^* \text{ に対してある } w_1 \in \Sigma^* \text{ が存在して,} \\ f(w_1) = f(w_2), \quad \{f(v) \mid w_1 v \in L_1\} = \{f(v) \mid w_2 v \in L_2\}. \end{array} \right.$$

次の問いに答えよ.

- (1) $L_1 \equiv L_2$ ならば $L_1 \sim L_2$ であることを示せ.
- (2) $L_1 \sim L_2$ であるが, $L_1 \equiv L_2$ でない例をあげよ.

以下, 正規言語 L_1, L_2 それぞれについて, これらを受理する有限決定性オートマトンが与えられているとする.

- (3) $L_1 \sim L_2$ であるかどうかを判定する手順を述べよ.
- (4) $L_1 \equiv L_2$ であるかどうかを判定する手順を述べよ.

Problem 2

Let Σ be a nonempty alphabet, and $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$. We define a function $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma_0^*$ by the following: $f(w)$ is the string obtained from the string $w \in \Sigma^*$ by dropping all the letters that are not in Σ_0 .

A binary relation \sim between regular languages over Σ is defined as follows.

$$L_1 \sim L_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \{f(w) \mid w \in L_1\} = \{f(w) \mid w \in L_2\}$$

Another binary relation \equiv between regular languages over Σ is defined as follows.

$$L_1 \equiv L_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \text{for any } w_1 \in \Sigma^* \text{ there exists } w_2 \in \Sigma^* \text{ such that} \\ f(w_1) = f(w_2) \text{ , } \{f(v) \mid w_1v \in L_1\} = \{f(v) \mid w_2v \in L_2\} \text{ ;} \\ \text{moreover, for any } w_2 \in \Sigma^* \text{ there exists } w_1 \in \Sigma^* \text{ such that} \\ f(w_1) = f(w_2) \text{ , } \{f(v) \mid w_1v \in L_1\} = \{f(v) \mid w_2v \in L_2\} \text{ .} \end{array} \right.$$

Answer the following questions.

- (1) Prove that $L_1 \equiv L_2$ implies $L_1 \sim L_2$.
- (2) Provide an example for which $L_1 \sim L_2$ holds but $L_1 \equiv L_2$ does not.

Assume now that, for regular languages L_1 and L_2 , we are given finite deterministic automata that accept L_1 and L_2 , respectively.

- (3) Describe a procedure that determines whether $L_1 \sim L_2$.
- (4) Describe a procedure that determines whether $L_1 \equiv L_2$.

問題 3

仮想記憶に関する以下の問いに答えよ。

- (1) オペレーティングシステムが提供する仮想記憶を実現するために、汎用コンピュータアーキテクチャはハードウェアによるメモリ管理支援機構を提供している。このようなメモリ管理支援機構を一つ選び、図を示しながらその概略を示せ。
- (2) オペレーティングシステムは、仮想記憶を管理するためにデマンドページング機構を提供している。問い(1)で答えたメモリ管理支援機構を用いて、デマンドページング機構の実装方法を示せ。
- (3) スラッシングの意味を説明し、ページングにおけるスラッシングを回避する方法を述べよ。

Problem 3

Answer the following questions about virtual memory.

- (1) General-purpose computer architecture provides a hardware mechanism of memory management support for realizing virtual memory on operating systems. Choose one such hardware mechanism, and explain it using figures.
- (2) An operating system provides a demand paging mechanism to manage virtual memory. Describe how to implement a demand paging mechanism that uses the hardware mechanism answered in Question (1).
- (3) Explain the meaning of *thrashing* and describe a method to avoid thrashing in paging.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが、切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.