平成20年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 I

平成19年8月21日
10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

3 次元空間の図形の 2 次元投影面への投影に関する以下の問いに答えよ．以下のいずれの三角形も，3 頂点が一直線上にないものとする．また，いずれの頂点も z 座標が正であるとする．

投影中心（視点）が 3 次元座標系の原点 O にあり，z 軸に垂直で $(0, 0, z_0)$ を通過する面を投影面（スクリーン）とする（ただし z_0 は正の定数である）．三角形の 3 つの頂点 P_1, P_2, P_3 の座標をそれぞれ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) とする．また，これらの点を投影面に投影した点をそれぞれ P_1', P_2', P_3' とする．投影された点 (x', y', z_0) に対し，投影面上の 2 次元座標 (x', y') を対応させる．(図参照)

(1) P_1', P_2', P_3' の投影面上の 2 次元座標系における座標 (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3') を計算せよ．

(2) 投影面上の点 $P'(x', y')$ が与えられたとき，この点が三角形 $\triangle P_1'P_2'P_3'$ の内部かどうか判定する方法を示せ．但し，点 P' が頂点に一致したり，辺の上にあったりする場合は内部ではないとする．

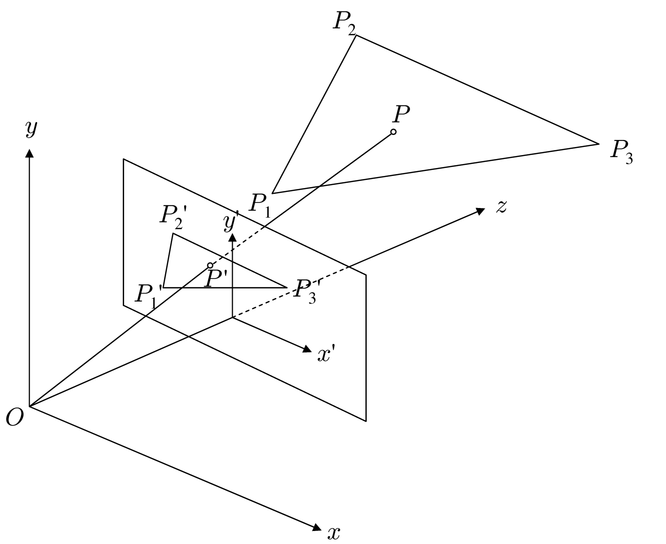
(3) 3 次元空間での三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ の法線ベクトルをひとつ求め，三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ を含む面の方程式を求めよ．

(4) 投影面上の点 P' が投影面上の三角形 $\triangle P_1'P_2'P_3'$ の内部にある場合を考える．この点 P' は 3 次元空間の三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 内の点 P を投影した点に対応するとしたとき，P' の座標から P の座標を求める式を与えよ．

(5) 次に，点 P が P_1 と P_2 の中点であるとき，P を投影した点 P' が P_1' と P_2' の中点となる条件を求め，その幾何学的な意味を述べよ．

また，点 P が $\triangle P_1P_2P_3$ の重心であるとき，P を投影した点 P' が $\triangle P_1'P_2'P_3'$ の重心となる条件を求めよ．

但し $\triangle P_1P_2P_3$ と O は同一平面上にないものと仮定せよ．



Problem 1

Answer the following questions on the projection of objects in a three dimensional space onto a two dimensional screen. For all triangles in the following, assume that each has three vertices that are not on a line, and that each vertex has a positive z coordinate.

Suppose that the projection center (viewpoint) is at the origin O of the three dimensional coordinate system, and the projection plane (screen) is perpendicular to the z-axis and intersects with the z-axis at the coordinates $(0, 0, z_0)$, where z_0 is a positive constant. Let P_1, P_2, and P_3 be the three vertices of a triangle and have the coordinates (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), and (x_3, y_3, z_3), respectively. The points P_1', P_2', and P_3' are defined to be the projections of P_1, P_2, and P_3, respectively, onto the projection plane. To a projected point (x', y', z_0), coordinates (x', y') of the two dimensional projection plane coordinate system are associated. (See the figure.)

(1) Calculate the projection plane coordinates $P_1'(x_1', y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$, and $P_3'(x_3', y_3')$.

(2) Assume that a point $P'(x', y')$ on the projection plane is given. Find a method to determine whether or not the point P' lies inside the triangle $\triangle P_1'P_2'P_3'$. Assume that if P' coincides with one of the vertices or on an edge of the triangle, then it is not regarded as inside the triangle.

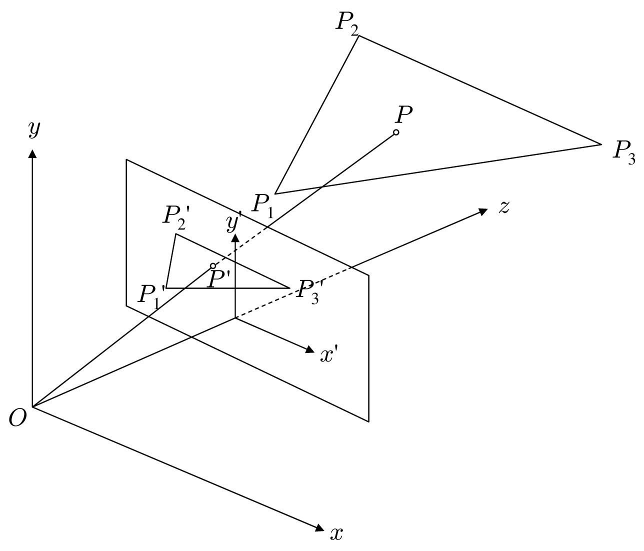
(3) Calculate a normal vector of the triangle $\triangle P_1P_2P_3$ in the three dimensional coordinate system, and give an equation of the plane that contains the triangle $\triangle P_1P_2P_3$.

(4) Suppose that the point P' on $\triangle P_1'P_2'P_3'$ is obtained by projecting a point P on $\triangle P_1P_2P_3$ onto the screen. Write the coordinates of P using the coordinates of P'.

(5) Next assume that P is the middle point of P_1 and P_2. Derive the condition for P', which is the projection of P, being the middle point of P_1' and P_2', and explain its geometric interpretation.

Also derive the condition for P' being the center of mass of $\triangle P_1'P_2'P_3'$ when P is the center of mass of $\triangle P_1P_2P_3$.

Assume that $\triangle P_1P_2P_3$ and O are not on a plane.



問題 2

整数 $N \geq 1$ に対して，次のように定義される言語 L_N を考える．

$$L_N = \{a_1 \cdots a_n \in \{0,1\}^* \mid n \geq N,\ a_{n-N+1} = 1\}$$

以下の問いに答えよ．

(1) L_3 を受理する，状態数が 4 の非決定性有限オートマトンを作れ．

(2) L_3 を受理する，状態数が 8 の決定性有限オートマトンを作れ．

(3) L_N を受理する決定性有限オートマトンの状態数は 2^N 以上であることを証明せよ．

Problem 2

For an integer $N \geq 1$, consider the following language L_N

$$L_N = \{a_1 \cdots a_n \in \{0,1\}^* \mid n \geq N,\ a_{n-N+1} = 1\}.$$

Answer the following questions.

(1) Construct a nondeterministic finite automaton with 4 states which accepts L_3.

(2) Construct a deterministic finite automaton with 8 states which accepts L_3.

(3) Prove that any deterministic finite automaton which accepts L_N has at least 2^N states.

問題 3

互いに異なる n 個の整数からなる列 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を考える．この中から k 番目に小さい数を求めるアルゴリズムとして，以下の擬似コードで表されるアルゴリズムを考える．なお，$|X|$ は X の要素数を表す．また，N はある正の定数である．

1: Select(k, X) {
2:    if $(|X| < N)$ {
3:       return ヒープを用いて X の中で k 番目に小さい数を求めたもの;
4:    }
5:    X を 5 個以下の整数からなる $m = \lceil \frac{|X|}{5} \rceil$ 組の整数列 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ にわける;
6:          /* $i < m$ ならば $|X_i| = 5$ とする．$|X_m|$ は 5 未満となる可能性がある．*/
7:    for $(i = 1$ to $m)$ {
8:       $y_i \leftarrow$ Select$(\lceil \frac{|X_i|}{2} \rceil,\ X_i)$;
9:    }
10:    $a \leftarrow$ Select$(\lceil \frac{m}{2} \rceil,\ \{y_1, y_2, \ldots, y_m\})$;
11:    $X_{small} \leftarrow X$ の中で a より小さい整数からなる列;
12:    $X_{large} \leftarrow X$ の中で a より大きい整数からなる列;
13:    if $(|X_{small}| = k - 1)$ {
14:       return a;
15:    }
16:    if $(|X_{small}| \geq k)$ {
17:       return Select$(k,\ X_{small})$;
18:    }
19:    else {
20:       return Select$(k - |X_{small}| - 1,\ X_{large})$;
21:    }
22: }

以上の擬似コードについて以下の問いに答えよ．

(1) 3 行目で用いられているヒープとはどのようなものか解説せよ．

(2) 定数 N を十分大きく取れば，11 行目を終わった時点で $\frac{1}{4}|X| \leq |X_{small}| \leq \frac{3}{4}|X|$ であることを証明せよ．

(3) 上のアルゴリズムの最悪計算量を $T(n)$ として，$T(n)$ に関する再帰方程式を求めよ．(なお，$n = |X|$ である．)

(4) $T(n)$ のオーダーが $O(n)$ であることを示せ．

Problem 3

For a sequence of n different integers $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, consider the following algorithm that computes the k-th smallest integer in the sequence. $|X|$ denotes the number of elements in X. N is a positive constant.

1: Select(k, X) {
2:   if $(|X| < N)$ {
3:     return the k-th smallest integer in X computed by using a heap;
4:   }
5:   Divide X into $m = \lceil \frac{|X|}{5} \rceil$ sequences of 5 or less integers, and let them be $X_1, X_2, \ldots, X_m$;
6:       /* We let $|X_i| = 5$ for $i < m$. $|X_m|$ can be smaller than 5. */
7:   for $(i = 1$ to $m)$ {
8:     $y_i \leftarrow$ Select$(\lceil \frac{|X_i|}{2} \rceil, X_i)$;
9:   }
10:   $a \leftarrow$ Select$(\lceil \frac{m}{2} \rceil, \{y_1, y_2, \ldots, y_m\})$;
11:   $X_{small} \leftarrow$ the sequence of the integers in X that are smaller than a;
12:   $X_{large} \leftarrow$ the sequence of the integers in X that are larger than a;
13:   if $(|X_{small}| = k - 1)$ {
14:     return a;
15:   }
16:   if $(|X_{small}| \geq k)$ {
17:     return Select(k, X_{small});
18:   }
19:   else {
20:     return Select$(k - |X_{small}| - 1, X_{large})$;
21:   }
22: }

Answer the following questions on the above pseudo code.

(1) Describe what a 'heap' mentioned in line 3 is.

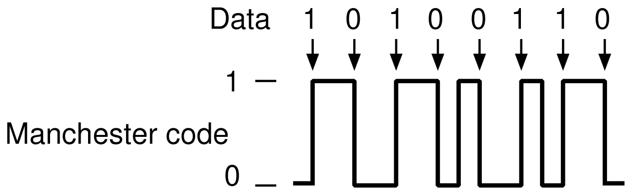
(2) Prove that $\frac{1}{4}|X| \leq |X_{small}| \leq \frac{3}{4}|X|$ after line 11 when the constant N is large enough.

(3) Let the worst case computational complexity of the above algorithm be $T(n)$. Show a recurrence equation of $T(n)$. (Note that $n = |X|$.)

(4) Show that $T(n)$ is $O(n)$.

問題 4

10 Mbps イーサネットで用いられる情報の符号化としてマンチェスター符号がある．以下に示すように，マンチェスター符号では，データ 1 を $0 \rightarrow 1$ の遷移，データ 0 を $1 \rightarrow 0$ の遷移で表し，データに対応する遷移は図の矢印のように一定の時間間隔で発生させる．



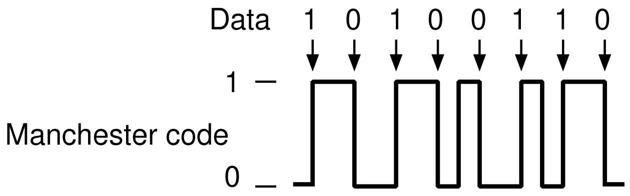
(1) クロックに同期して入力されるデータをマンチェスター符号に変換する論理回路を，D-フリップフロップ，AND，OR，NOT ゲートを用いて作成せよ．

(2) 10 Mbps イーサネット通信でマンチェスター符号を用いる理由を 2 つ以上あげ，3 行以内で述べよ．

(3) マンチェスター符号は送信するデータ帯域の 2 倍の帯域をネットワークに要求する．問い (2) で答えたマンチェスター符号の特長をできるだけ保持しながら，ネットワーク帯域幅をより効率的に使用する符号化手法について論じよ．

Problem 4

Manchester code is used as an encoding method of data in 10 Mbps Ethernet. As shown in the figure below, data 1 is expressed by a $0 \to 1$ transition, and data 0 is expressed by a $1 \to 0$ transition. Transitions that signify data are generated with regular time intervals as shown in the arrow marks of the figure.



(1) Design a Manchester encoder, using D flip-flops, AND, OR, and NOT gates, whose input data is synchronized with a clock.

(2) Explain at least two reasons to use Manchester code in 10 Mbps Ethernet. The answer should be within three lines.

(3) Manchester code requires the network bandwidth twice as wide as the data transfer bandwidth. Discuss a coding method that utilizes the network bandwidth better, without much degrading the advantages of Manchester code answered in question (2).

平成20年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 II

平成19年8月21日
13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

N を正の整数で 4 の倍数,

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$$

を 1 の原始 N 乗根とする（i は虚数単位）. 複素数列 $(z_0, z_1, \ldots, z_{N-1})$ に対する N 点離散フーリエ変換 $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_{N-1})$ を

$$Z_k = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \omega^{jk} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1)$$

で定義する.

以下の問いに答えよ.

(1) z_j はすべて実数（すなわち，虚部が 0）とする. このとき，Z_0 と $Z_{\frac{N}{2}}$ は実数となることを示せ. また，$k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \frac{N}{2} - 1$ に対して $Z_k = \bar{Z}_{N-k}$ を示せ. ($\bar{z}$ は z の共役複素数を表す.)

(2) z_j はすべて実数とし,

$$g_j = z_{2j} + i\, z_{2j+1} \qquad \left(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2} - 1\right)$$

とおき，$(g_0, g_1, \ldots, g_{\frac{N}{2}-1})$ に対する $\frac{N}{2}$ 点離散フーリエ変換を $(G_0, G_1, \ldots, G_{\frac{N}{2}-1})$ とする. すなわち

$$G_k = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} g_j \omega^{2jk} \qquad \left(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2} - 1\right)$$

である. このとき，Z_0 と $Z_{\frac{N}{2}}$ を G_0 で表せ. (共役複素数または実部・虚部を使ってもよい.)

(3) 問い (2) と同じ条件のもとで，$k = 1, 2, \ldots, \frac{N}{4} - 1$ に対し，Z_k と $Z_{\frac{N}{2}-k}$ を G_k と $G_{\frac{N}{2}-k}$ で表せ.

Problem 1

Let N be a positive integer that is a multiple of 4, and

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$$

be the primitive Nth root of 1 (i is the imaginary unit). For a sequence of complex numbers $(z_0, z_1, \ldots, z_{N-1})$, its N-point discrete Fourier transform $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_{N-1})$ is defined as

$$Z_k = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \omega^{jk} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1).$$

Answer the following questions.

(1) Assume that all z_j are real (that is, their imaginary parts are zeros). Show that Z_0 and $Z_{\frac{N}{2}}$ are real numbers. Also show that $Z_k = \bar{Z}_{N-k}$ for $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{N}{2} - 1$. ($\bar{z}$ is the complex conjugate of z.)

(2) Assume that all z_j are real numbers. Let

$$g_j = z_{2j} + i\, z_{2j+1} \qquad \left(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2} - 1\right)$$

and $(G_0, G_1, \ldots, G_{\frac{N}{2}-1})$ be the $\frac{N}{2}$-point discrete Fourier transform of $(g_0, g_1, \ldots, g_{\frac{N}{2}-1})$, that is,

$$G_k = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} g_j \omega^{2jk} \qquad \left(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2} - 1\right).$$

Express Z_0 and $Z_{\frac{N}{2}}$ in terms of G_0. (Complex conjugates or the real/imaginary parts may be used.)

(3) Express Z_k and $Z_{\frac{N}{2}-k}$ in terms of G_k and $G_{\frac{N}{2}-k}$ for $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{N}{4} - 1$, under the same assumptions as question (2).

問題 2

整数（以下では c で表す）と二項演算子 $+$ と $\times$ から作られる式を，以下のようにして後置記法の文字列に変換する．ただし，式 E が後置記法の文字列 w に変換されることを $E \Rightarrow w$ と書く．

$c \Rightarrow c$
$E_1 \Rightarrow w_1$ かつ $E_2 \Rightarrow w_2$ ならば $E_1 + E_2 \Rightarrow w_1 w_2 +$
$E_1 \Rightarrow w_1$ かつ $E_2 \Rightarrow w_2$ ならば $E_1 \times E_2 \Rightarrow w_1 w_2 \times$

式 E を通常の整数演算で評価した値を $eval(E)$ と書く．後置記法の文字列 w と値の列（スタック）s の組 (w, s) を書き換える規則を以下のように導入する．ただし，組 (w_1, s_1) が組 (w_2, s_2) に書き換わることを $(w_1, s_1) \to (w_2, s_2)$ と書く．

c の値が v_c ならば $(cw, s) \to (w, v_c s)$
$v = eval(v_1 + v_2)$ ならば $(+w, v_2 v_1 s) \to (w, vs)$
$v = eval(v_1 \times v_2)$ ならば $(\times w, v_2 v_1 s) \to (w, vs)$

$\to$ の推移閉包を $\xrightarrow{*}$ と書く．命題

$eval(E) = v$ かつ $E \Rightarrow w$ であるならば，$(w, \epsilon) \xrightarrow{*} (\epsilon, v)$ が成り立つ

を証明したい．ただし，ϵ は空列または空文字列を表す．

以下の問いに答えよ．

(1) 何に関する帰納法を用いて証明すればよいか．

(2) 帰納法がうまくいくためには，証明する命題を一般化しなければならない．どのように一般化すればよいか．

(3) 一般化された命題を帰納法を用いて証明せよ．

Problem 2

Consider translating an expression made of integer constants (denoted by c below) and binary operators $+$ and $\times$ to a string in postfix notation as follows, where $E \Rightarrow w$ means that expression E is translated to string w.

$c \Rightarrow c$
$E_1 \Rightarrow w_1$ and $E_2 \Rightarrow w_2$ imply $E_1 + E_2 \Rightarrow w_1 w_2 +$
$E_1 \Rightarrow w_1$ and $E_2 \Rightarrow w_2$ imply $E_1 \times E_2 \Rightarrow w_1 w_2 \times$

Let us write $eval(E)$ for the value resulting from evaluating an expression E by usual integer arithmetics. We then introduce the following rules for rewriting a pair (w, s) of a string w in postfix notation and a sequence (stack) s of values, where $(w_1, s_1) \rightarrow (w_2, s_2)$ means that pair (w_1, s_1) is rewritten into pair (w_2, s_2).

if the value of c is v_c then $(cw, s) \rightarrow (w, v_c s)$
$v = eval(v_1 + v_2)$ implies $(+w, v_2 v_1 s) \rightarrow (w, vs)$
$v = eval(v_1 \times v_2)$ implies $(\times w, v_2 v_1 s) \rightarrow (w, vs)$

The transitive closure of $\rightarrow$ is denoted by $\xrightarrow{*}$. We now want to prove a proposition that

if $eval(E) = v$ and $E \Rightarrow w$ hold, then $(w, \epsilon) \xrightarrow{*} (\epsilon, v)$ holds,

where ϵ denotes an empty sequence or an empty string.

Answer the following questions.

(1) To prove the proposition, should we use induction on what?

(2) In order for induction to go through, we should generalize the proposition. How should the proposition be generalized?

(3) Prove the generalized proposition by induction.

問題 3

2 次元空間の点列 U から任意の (0 個以上の) 点を削除してできる点列を U の部分列とよぶ．たとえば，点列 $U = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ に対し，(v_1, v_3, v_4) は U の部分列である．以下では，点列 U の i 番目の点を $U[i]$，点列 U の点数は $|U|$ と表すものとする．

$f(U, V)$ を $|U| = |V|$ を満たす 2 つの点列 U, V に対する次のような関数とする．

$$f(U,V) = \sum_{i=1}^{|U|}\{dist(U[i], V[i]) - c\}$$

ただし，$dist(v, w)$ は点 v と点 w のユークリッド距離，c は適当な正の実定数である．

このとき，与えられた U, V （点数は異なってもよい）に対して，$|U'| = |V'|$ を満たすすべての U の部分列 U' と V の部分列 V' の組に対する $f(U', V')$ の最小値を $min(U, V)$ とする．またその最小値を与える部分列を U'_{min}, V'_{min} とする．すなわち

$$\begin{aligned} min(U,V) &= \min\{f(U',V') \mid U' \subseteq U,\ V' \subseteq V,\ |U'| = |V'|\} \\ &= f(U'_{min}, V'_{min}) \end{aligned}$$

が成り立つ．但し $U' \subseteq U$ は U' が U の部分列であることを意味する．

また，$k = |U'_{min}| = |V'_{min}|$ として，$1 \le \ell \le k$ に対して

$$U'_{min}[\ell] = U[i_\ell], \qquad V'_{min}[\ell] = V[j_\ell]$$

となるように i_ℓ, j_ℓ を定める．すなわち，

$$\begin{aligned} min(U,V) &= f\left((U'_{min}[1], U'_{min}[2], \ldots, U'_{min}[k]), (V'_{min}[1], V'_{min}[2], \ldots, V'_{min}[k])\right) \\ &= f((U[i_1], U[i_2], \ldots, U[i_k]), (V[j_1], V[j_2], \ldots, V[j_k])) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ かつ $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ とする．

以下の問いに答えよ．

(1) 以下の U, V, c に対し，$min(U, V)$ および $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ と $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} U &= ((0,2),(1,2),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3),(4,2)) \\ V &= ((1,1),(2,1),(2,0),(3,0),(3,1),(4,1),(5,1)) \\ c &= 1.2 \end{aligned}$$

なお，$1 \le \ell \le k$ に対し $dist(U'_{min}[\ell], V'_{min}[\ell]) \le c$ となることに注意せよ．

(2) 点列 U の i 番目から j 番目までの部分点列を $U[i..j]$ と表す．

$1 \le \ell \le k$ を満たす任意の整数 ℓ について，

$$min(U[1..i_\ell], V[1..j_\ell]) = f\left((U[i_1], U[i_2], \ldots, U[i_\ell]), (V[j_1], V[j_2], \ldots, V[j_\ell])\right)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $min(U, V)$ を求めるアルゴリズムとその計算量を示せ．

Problem 3

Let U be a sequence of points in two dimensional space, and let us call subsequence of U a sequence of points that can be constructed from U by removing some (more than or equal to 0) points. For example, (v_1, v_3, v_4) is a subsequence of U, where $U = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Let $U[i]$ denote the i-th point of the sequence U, and let $|U|$ denote the number of points in U.

For two point sequences U and V such that $|U| = |V|$, we consider the following function.

$$f(U, V) = \sum_{i=1}^{|U|} \{dist(U[i], V[i]) - c\},$$

where $dist(v, w)$ denotes the Euclidean distance between v and w, and c is a real positive constant.

For given U and V (possibly $|U| \neq |V|$), let $min(U, V)$ be the minimum of $f(U', V')$ where U' and V' are subsequences of U and V, respectively, such that $|U'| = |V'|$. Let U'_{min} and V'_{min} be the subsequences that give the minimum. That is,

$$\begin{aligned} min(U, V) &= \min\{f(U', V') \mid U' \subseteq U,\ V' \subseteq V,\ |U'| = |V'|\} \\ &= f(U'_{min}, V'_{min}), \end{aligned}$$

where $U' \subseteq U$ means that U' is a subsequence of U.

Let $k = |U'_{min}| = |V'_{min}|$ and determine i_ℓ and j_ℓ for $1 \le \ell \le k$ as

$$U'_{min}[\ell] = U[i_\ell], \qquad V'_{min}[\ell] = V[j_\ell].$$

Thus we have

$$\begin{aligned} min(U, V) &= f\left((U'_{min}[1], U'_{min}[2], \ldots, U'_{min}[k]),\ (V'_{min}[1], V'_{min}[2], \ldots, V'_{min}[k])\right) \\ &= f((U[i_1], U[i_2], \ldots, U[i_k]),\ (V[j_1], V[j_2], \ldots, V[j_k]))\,. \end{aligned}$$

Here assume that $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ and $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Answer the following questions.

(1) Compute $min(U, V)$, $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, and $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ when

$$\begin{aligned} U &= ((0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (4,2)), \\ V &= ((1,1), (2,1), (2,0), (3,0), (3,1), (4,1), (5,1)), \\ c &= 1.2. \end{aligned}$$

Note that $dist(U'_{min}[\ell], V'_{min}[\ell]) \le c$ holds for $1 \le \ell \le k$.

(2) Let $U[i..j]$ denote the subsequence from the i-th point to the j-th point of U.
Show that the following equation holds for an arbitrary integer ℓ such that $1 \le \ell \le k$:

$$min(U[1..i_\ell], V[1..j_\ell]) = f\left((U[i_1], U[i_2], \ldots, U[i_\ell]),\ (V[j_1], V[j_2], \ldots, V[j_\ell])\right).$$

(3) Describe an algorithm for computing $min(U, V)$ and its computational complexity.

問題 4

2 台の計算機間を 1000 バイトの固定長パケットで通信するデータリンク層ネットワークを仮定する．本データリンク層ネットワークの通信バンド幅を 10^6 byte/sec，通信遅延を 10 msec，フロー制御せず，パケット到着は保証されないと仮定する．このデータリンク層の上に，次のようなネットワークプロトコルを途中まで設計した．

- パケットのフォーマット

```
+-----------------+-------------+-----------+--------------+
| Sequence Number | Packet Type | Data Size | data         |
|    (3 Bytes)    |   (1 Byte)  | (2 Bytes) |              |
+-----------------+-------------+-----------+--------------+
 Packet Type: 1  DATA
              0  ACK
```

- 受信側の処理
  DATA パケットを受け取ったら，ACK パケットを送信側に送り返す．ACK パケットの Sequence Number は受信したパケットの Sequence Number とする．

- 送信側の処理
  Sequence Number の初期値は乱数で決める．DATA パケットを送信する度に，当該パケットの ACK パケットを受信するまで，次のパケットの送信を待つ．DATA パケットを送信する毎に Sequence Number に (modulo 2^{24} で) 1 を足す．

以下の問いに答えよ．

(1) パケットが喪失しないときの最大通信スループットを求めよ．

(2) パケット喪失を考慮したプロトコルに修正せよ．擬似コードで書いてもよい．

(3) データリンク層の通信バンド幅をよりよく活用できるように，プロトコルを修正せよ．

(4) 上と同じデータリンク層を使って，64 台の計算機を 8×8 のメッシュ状につなげる．上記のプロトコルを基に計算機同士が通信できるようネットワークプロトコルを設計し，下記項目毎にそのプロトコルを説明せよ．

  (a) パケットフォーマット

  (b) 各計算機上での送信，受信，ルーティング処理

Problem 4

We assume that two computers are connected by a network of data-link layer whose packet size is fixed as 1000 bytes. We also assume that the bandwidth and the latency of this data-link layer network are 10^6 byte/sec and 10 msec, respectively. No packet flow controlling mechanism is supported, and packet arrival is not guaranteed. The following is an unfinished design of a network protocol on top of this data-link layer.

- Packet Format

```
+-----------------+-------------+-----------+--------------+
| Sequence Number | Packet Type | Data Size | data         |
|    (3 Bytes)    |   (1 Byte)  | (2 Bytes) |              |
+-----------------+-------------+-----------+--------------+
 Packet Type: 1  DATA
              0  ACK
```

- Processing in the receiver
  When a `DATA` packet is received, an `ACK` packet, whose Sequence Number is the same as the received `DATA` packet, is sent back to the sender.

- Processing in the sender
  The initial Sequence Number is randomly chosen. After sending a `DATA` packet, the sender waits for the `ACK` packet of the `DATA` packet, and the sender sends the next `DATA` packet after the receipt of the `ACK` packet. The Sequence Number is incremented by 1 (modulo 2^{24}) at each packet sending.

Answer the following questions.

(1) Calculate the maximum throughput when no packet is lost.

(2) Modify the protocol so as to consider packet loss. The protocol may be written in a pseudo code.

(3) Modify the protocol so as to utilize the data-link network bandwidth better.

(4) Assume that 64 computers are connected with a network of 8×8 mesh topology using the same data-link layer as above. Design a new network protocol based on the above protocol so that all the computers may communicate each other. Explain the new protocol from the following points of view.

   (a) Packet format.

   (b) Sending, receiving, and routing on each computer.