平成20年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

数学

平成20年2月5日
10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 2 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 2 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

n を正の整数定数とする．A は $n \times n$ の実行列で正則とする．また，$A^\top$ は行列 A の転置を表す（ベクトルも同様）．以下の問いに答えよ．

(1) $A^\top A$ の固有値はすべて正の実数であることを示せ．

(2) $A^\top A$ の固有値を

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_n^2$$

とする．ただし σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は正の実数とする．このとき，任意の n 次実数列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \sigma_1 \|\boldsymbol{x}\|$$

および

$$\|A^{-1}\boldsymbol{x}\| \leq \sigma_n^{-1} \|\boldsymbol{x}\|$$

となることを示せ．ただし実数列ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{v}}$ である．

(3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を n 次実数列ベクトルとして，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．ただし，以下では $\|\boldsymbol{b}\| > 0$ とする．ここで右辺 $\boldsymbol{b}$ の代わりに誤差を含む右辺 $\tilde{\boldsymbol{b}}$ を考え，これから計算される誤差を含む解を $\tilde{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}$ とする．このとき，

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| \leq \sigma_n^{-1} \|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|$$

となることを示せ．これを用いてさらに

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

を示せ．

(4) $n = 2$ として，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

とする．ただし $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$ $(i = 1,\, 2)$ とする．このとき，σ_1 と σ_2 を求めて $\theta_1 - \theta_2$ で表せ．また，σ_1/σ_2 が最小となるような θ_1 と θ_2 の関係を示せ．

Problem 1

Fix a positive integer n. Let A be a real non-singular $n \times n$ matrix. $A^\top$ represents the transpose of a matrix A (also used for vectors). Answer the following questions.

(1) Prove that all eigenvalues of $A^\top A$ are positive real numbers.

(2) Let the eigenvalues of $A^\top A$ be

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_n^2,$$

where σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ are positive real numbers. Show that it holds that

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \sigma_1 \|\boldsymbol{x}\|$$

and

$$\|A^{-1}\boldsymbol{x}\| \leq \sigma_n^{-1} \|\boldsymbol{x}\|$$

for any real column vector $\boldsymbol{x}$ of size n. Note that $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{v}}$ for a real column vector $\boldsymbol{v}$.

(3) Let $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{b}$ be real column vectors of size n, and consider a system of linear equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Assume $\|\boldsymbol{b}\| > 0$ in this question. Consider a perturbed right-hand side $\tilde{\boldsymbol{b}}$ in place of $\boldsymbol{b}$, and let the perturbed solution be $\tilde{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}$. Show that we have

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| \leq \sigma_n^{-1} \|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|.$$

Using this, show that we also have

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

(4) Let $n = 2$ and

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \end{pmatrix},$$

where $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$ $(i = 1,\ 2)$. Calculate σ_1 and σ_2, and represent them in terms of $\theta_1 - \theta_2$. Determine the relation between θ_1 and θ_2 which minimizes σ_1/σ_2.

問題 2

実数 s と自然数 k に対して,（一般化された）二項係数を

$$\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{s-i}{k-i} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$$

で定義する．また，s を実数として

$$f(x) = (1+x)^s$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 k に対して

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

を求めて，二項係数で表わせ.

(2) $|x| < 1$ に対して

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} x^k$$

となることを示せ.（ただし収束半径の証明は省略せよ．）

(3) 自然数 k に対し,

$$\gamma_k = \int_0^1 \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} ds$$

とする．関数 $G(t)$ を $|t| < 1$ に対して

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k$$

と定義すると,

$$G(t) = \frac{t}{\log(1+t)}$$

が成り立つことを示せ.

(4) $\log(1+t)$ を $t = 0$ のまわりで Taylor 展開せよ.

(5) 問い (3) より

$$G(t)\log(1+t) = t$$

となる．この両辺を t で展開し，自然数 j に対して t^j の係数を比較することにより，γ_k に関する関係式を得よ.

Problem 2

(Generalized) binomial coefficients are defined as

$$\binom{s}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{s-i}{k-i} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$$

for a real number s and a natural number k. Let

$$f(x) = (1+x)^s$$

for a real number s. Answer the following questions.

(1) Represent

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

with binomial coefficients.

(2) Show

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

for $|x| < 1$. (Omit proof of the convergence radius.)

(3) Let

$$\gamma_k = \int_0^1 \binom{s}{k} ds$$

for a natural number k, and define $G(t)$ for $|t| < 1$ as

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k.$$

Prove that it holds that

$$G(t) = \frac{t}{\log(1+t)}.$$

(4) Give the Taylor expansion of $\log(1+t)$ around $t = 0$.

(5) From question (3) we have

$$G(t)\log(1+t) = t.$$

By expanding the both sides of this equation in terms of t and comparing the coefficient of t^j for each natural number j, derive relation expressions among γ_k.

平成20年度

東京大学大学院情報理工学系研究科

コンピュータ科学専攻

入学試験問題

専門科目 I

平成20年2月6日

10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.

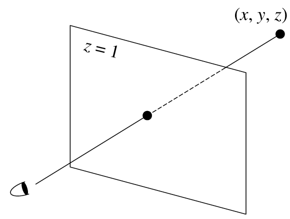
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

同次座標とは，通常 2 次元で (x, y) と表される座標を，実数 w $(\neq 0)$ を用いて 3 次元の (xw, yw, w) として表す座標である．選ぶ w の値によって，ひとつの 2 次元座標が異なる 3 次元座標に対応することになる．これに関して，以下の問いに答えよ．

(1) 透視投影においては，空間内の頂点の 2 次元投影面への写像を，その頂点と視点を結んだ直線と投影面との交点で定める．視点が原点，投影面が $z = 1$ の場合について，空間内の頂点 (x, y, z) (ただし $z \neq 0$ とする) の投影点を求めよ．また，透視投影と同次座標との関連について，分かりやすくかつ簡潔に説明せよ．



(2) 2 次元平面上の 3 点

$$\boldsymbol{p}_0 = (1, 0), \quad \boldsymbol{p}_1 = (1, 1), \quad \boldsymbol{p}_2 = (0, 1)$$

と曲線

$$\boldsymbol{c}(t) = \frac{(1-t)^2\boldsymbol{p}_0 + 2(1-t)tw_1\boldsymbol{p}_1 + t^2\boldsymbol{p}_2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw_1 + t^2}, \qquad 0 \le t \le 1$$

を考える（w_1 は実数定数）．このとき，$\boldsymbol{c}(t)$ が半径 1 の四分円弧を表すように定数 w_1 を定めよ．

(3) 問い (2) の $\boldsymbol{c}(t)$ を同次座標で考える（w_1 は問い (2) で求めた値を用いる）．すなわち，3 次元空間の 3 点

$$\hat{\boldsymbol{p}}_0 = (1, 0, 1), \quad \hat{\boldsymbol{p}}_1 = (1, 1, 1), \quad \hat{\boldsymbol{p}}_2 = (0, 1, 1)$$

と曲線

$$\hat{\boldsymbol{c}}(t) = (1-t)^2\hat{\boldsymbol{p}}_0 + 2(1-t)tw_1\hat{\boldsymbol{p}}_1 + t^2\hat{\boldsymbol{p}}_2$$

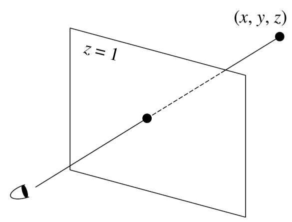
を考える．このとき，曲線 $\hat{\boldsymbol{c}}(t)$ はひとつの平面上にあることを示せ．さらに，曲線 $\hat{\boldsymbol{c}}(t)$ は放物線であることを示せ.（ヒント：平面上の座標系で考えよ.）

(4) 錐面 $ax^2 + by^2 = z^2$ が $\hat{\boldsymbol{c}}(t)$ を含むように実数定数 a, b を定めよ（w_1 は問い (2) で求めた値を用いる）．また，このことから $\boldsymbol{c}(t)$ が円弧の一部となることを幾何学的な見地から説明せよ．

Problem 1

Homogeneous coordinates represent a point (x, y) on a two dimensional plane by a point (xw, yw, w) in three dimensional space, where w $(\neq 0)$ is a real number. Different w associates a different point in three dimensional space with the same point on the two dimensional plane. Answer the following questions.

(1) Perspective projection determines the projection of a point in a three dimensional space onto a two dimensional projection plane as the intersection of the projection plane and the line that contains the point in the three dimensional space and the view point. Determine the projection of a point (x, y, z) (with $z \neq 0$) assuming that the origin is the viewpoint and that the projection plane is $z = 1$. Also, explain the relation between perspective projection and homogeneous coordinates plainly and briefly.



(2) Consider three points

$$\boldsymbol{p}_0 = (1, 0), \quad \boldsymbol{p}_1 = (1, 1), \quad \boldsymbol{p}_2 = (0, 1)$$

and a curve

$$\boldsymbol{c}(t) = \frac{(1-t)^2\boldsymbol{p}_0 + 2(1-t)tw_1\boldsymbol{p}_1 + t^2\boldsymbol{p}_2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw_1 + t^2}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

on a two dimensional plane, where w_1 is a real constant. Determine w_1 so that $\boldsymbol{c}(t)$ represents a quarter of a circle of radius 1.

(3) Consider $\boldsymbol{c}(t)$ of question (2) in homogeneous coordinates (for w_1 use the value obtained in question (2)). That is, consider three points

$$\hat{\boldsymbol{p}}_0 = (1, 0, 1), \quad \hat{\boldsymbol{p}}_1 = (1, 1, 1), \quad \hat{\boldsymbol{p}}_2 = (0, 1, 1)$$

and a curve

$$\hat{\boldsymbol{c}}(t) = (1-t)^2\hat{\boldsymbol{p}}_0 + 2(1-t)tw_1\hat{\boldsymbol{p}}_1 + t^2\hat{\boldsymbol{p}}_2$$

in a three dimensional space. Show that $\hat{\boldsymbol{c}}(t)$ is on a plane. Also show that $\hat{\boldsymbol{c}}(t)$ is a parabola. (Hint: Consider the coordinate system on the plane.)

(4) Determine real constants a and b so that a conical surface $ax^2 + by^2 = z^2$ contains $\hat{\boldsymbol{c}}(t)$ (for w_1 use the value obtained in question (2)). From this fact, explain why $\boldsymbol{c}(t)$ becomes a part of circle from geometric viewpoints.

問題 2

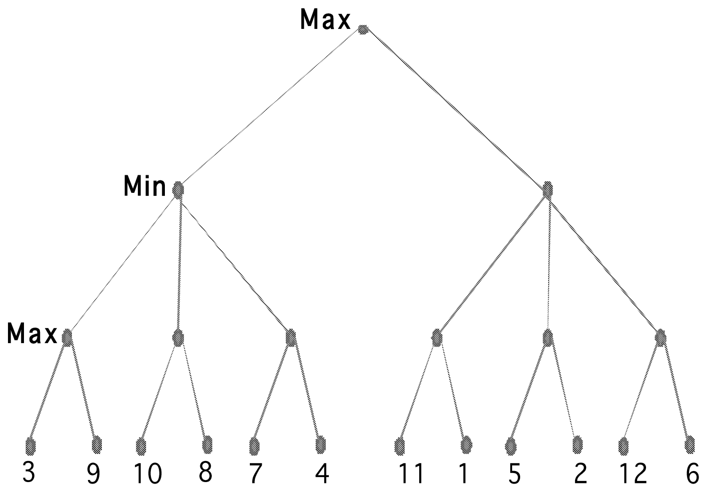
下の図は，2 人ゲームの局面を示している．端点節点 (leaf node) についた数字は，その節点に対応する局面の評価値である．以下の問いに，必要に応じて下の図を解答用紙にかき写して答えよ．

(1) α-β 探索法で，左から右に節点が展開されるとする．端点節点（leaf node）のうちで，実際に評価される節点を丸で囲め．

(2) 頂点節点の評価値は，いくらになるか？また，頂点節点で選択される手は，右・左のいずれか？

(3) 左から右ではなく，α-β 法による枝刈りがもっとも有効に働く場合の節点の展開順序を考えよ．その順序を節点の横に下線を引いた数字で示せ．また，α-β 探索が MIN-MAX 探索とまったく同じになる場合の節点の展開順序を考え，節点の横に□で囲んだ数字で示せ．

(4) 問い (3) の結果を一般化し，α-β 法がもっとも有効に働く場合の探索木の様子をなるべくわかりやすい形で図示せよ．



Problem 2

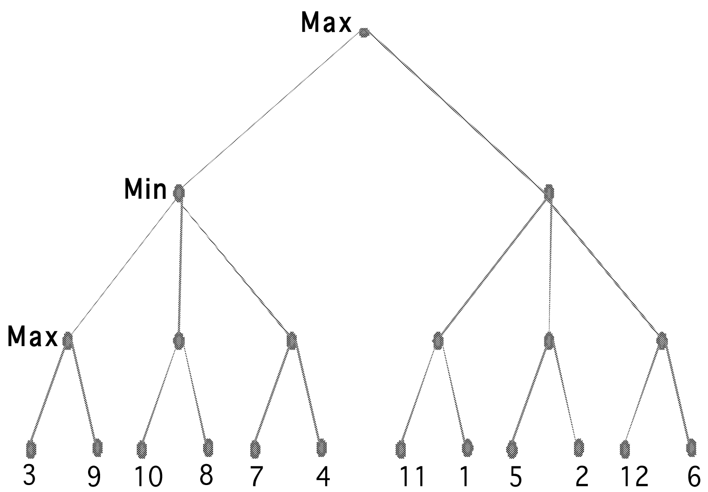
The figure below shows a certain state of a two-player game. The number associated with each leaf node indicates the value of evaluating the leaf node under the state of the game. Answer the following questions, copying the following figure onto the answer sheet if necessary.

(1) Suppose that we use the α-β search method where the nodes are expanded from left to right. Put circles on the leaf nodes that are actually evaluated.

(2) What is the value of evaluating the root node? And which move (either the left or the right) is selected at the root node?

(3) Find the expansion order where the α-β search works most effectively, rather than the order from left to right. Indicate the order by an underlined number on the side of each node. In addition, find an expansion order where the α-β search works in exactly the same way as the MIN-MAX search method and indicate the order by a boxed number on the side of each node.

(4) Generalizing the result of (3), depict a search tree where the α-β search works most effectively.



問題 3

$i < j$ である 2 つの整数 i と j に対して $Rand(i,j)$ は i 以上 j 以下の理想的な整数乱数をあらわし，これは定数時間で計算可能であるものとする．また，$\{1, 2, \cdots, n\}$ からそれ自身への全単射を置換という．この問題では置換 σ を

$$\left(\begin{array}{cccc} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{array} \right)$$

であらわす．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 長さ 3 の恒等置換

$$I = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

に対して，I の 1 番目の要素と $Rand(1,3)$ 番目の要素を交換することによって置換 I' を作成し、さらに I' の 2 番目の要素と $Rand(2,3)$ 番目の要素を交換することによって置換 I'' を作成することを考える．このとき，得られる I'' として可能性のある置換をすべて列挙し，さらに列挙した置換それぞれに対しその置換が得られる確率を求めよ．

(2) 長さ n のすべてのあり得る置換の中からランダムに一つの置換を計算する（すなわち特定の置換を得る確率が他のどの置換を得る確率にも等しい）アルゴリズムを示し，その計算量を示せ．

Problem 3

$Rand(i, j)$ denotes an ideal random integer that is neither less than i nor larger than j, where i and j are integers such that $i < j$. We assume that $Rand(i, j)$ can be computed in constant time. A permutation of length n is a bijective function from $\{1, 2, \cdots, n\}$ onto itself. In this problem, let us represent a permutation σ as

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Consider an identity permutation

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

of length 3. Suppose that we first obtain a permutation I' by exchanging the first element and the $Rand(1, 3)$-th element of I, and then obtain a permutation I'' by exchanging the second element and the $Rand(2, 3)$-th element of I'. Enumerate all the possible permutations for I'' and compute the probabilities that we get them for all these permutations.

(2) Describe an algorithm that computes a permutation of length n randomly (*i.e.*, we can obtain any permutation with the same probability), and show the computational time complexity of the algorithm.

平成20年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 II

平成20年2月6日
13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

有限集合 Σ，および非決定性有限オートマトン（以下，NFA と略す）

$$M = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$$

が与えられたとする．ただし，Q は状態の有限集合，δ は状態遷移関数，Q_0 は初期状態の集合，および F は受理状態の集合である．次の両条件が成立するとき，M が，Σ 上の無限列 $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\ldots$ (各 $i = 0, 1, \ldots$ に対し，$\sigma_i \in \Sigma$) を「ω-受理する」という．

- ある初期状態 $q_0 \in Q_0$ から始まる状態遷移の無限列 $q_0 \xrightarrow{\sigma_0} q_1 \xrightarrow{\sigma_1} q_2 \ldots$ が存在する．
- 上記の列は無限回 F の元を通る．すなわち，$\{i \mid q_i \in F\}$ は無限集合である．

また，M が受理する無限列全体の集合が S のとき，M は S を「ω-認識する」という．

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 図 1 の NFA M_0 が，$(ab)^n b^\omega$ （ただし，$n \in \mathbb{N}; n > 0$），すなわち，語 $(ab)^n$ の後に b が無限回続くような列を ω-受理することを証明せよ．ただし，$\mathbb{N}$ は 0 以上の整数全体の集合とする．

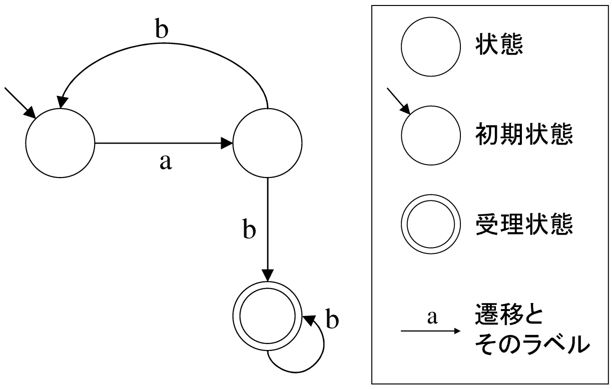


図 1: NFA M_0

(2) 集合

$$\{w_0 w_1 \ldots \mid \forall i \in \mathbb{N}. \exists n_i \in \mathbb{N}. w_i = (ab)^{n_i} \text{または} (aba)^{n_i}\}$$

を ω-認識する NFA の例を 1 つ示せ．ただし，$w_0w_1\ldots$ は，無限個の語 w_i を順次結合してできる無限列である．解答は，図 1 と同様に図示してもよい．

(3) M_0 と同じ集合を ω-認識するような決定性有限オートマトン M_1 の例を 1 つ示せ．解答は，図 1 と同様に図示してもよい．

Problem 1

Let a finite set Σ and a nondeterministic finite automaton (NFA hereafter)

$$M = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$$

are given, where Q is the finite set of the states, δ is the transition function, Q_0 is the set of the initial states, and F is the set of the accept states. We say that M ω-accepts an infinite sequence $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\ldots$ of symbols in Σ ($\sigma_i \in \Sigma$ for each $i = 0, 1, \ldots$) when both the following conditions hold.

- There exists an infinite sequence of transitions $q_0 \xrightarrow{\sigma_0} q_1 \xrightarrow{\sigma_1} q_2 \ldots$ beginning from an initial state $q_0 \in Q_0$.
- The above sequence visits elements of F infinite times. That is, $\{i \mid q_i \in F\}$ is an infinite set.

M is said to ω-recognize S if S is the set of all the infinite sequences ω-accepted by M.

Answer the following questions.

(1) Prove that the NFA M_0 shown in Figure 1 ω-accepts $(ab)^n b^\omega$ (where $n \in \mathbb{N}$ and $n > 0$), that is, a sequence beginning with the word $(ab)^n$ followed by the infinite repetition of b. Note that $\mathbb{N}$ is the set of all the integers no less than 0.

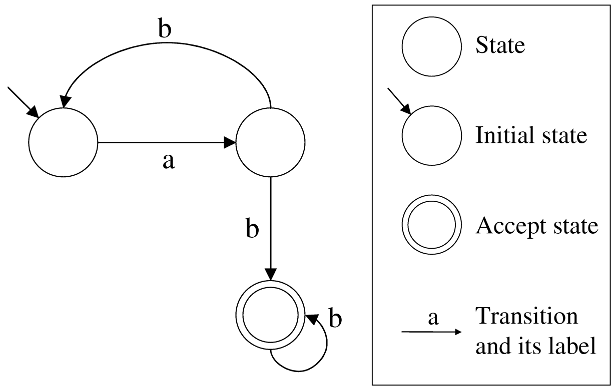


Figure 1: NFA M_0

(2) Show an example of an NFA ω-accepting the set

$$\{w_0 w_1 \ldots \mid \forall i \in \mathbb{N}.\, \exists n_i \in \mathbb{N}.\, w_i = (ab)^{n_i} \text{ or } (aba)^{n_i}\},$$

where $w_0 w_1 \ldots$ is the infinite sequence obtained by concatenating infinitely many words w_i in the order of $w_0, w_1, \ldots$. The answer may be illustrated in the same way as Figure 1.

(3) Show an example of a deterministic finite automaton M_1 ω-recognizing the same set as M_0. The answer may be illustrated in the same way as Figure 1.

問題 2

以下の擬似コードは，辺にコストが設定されている連結な無向グラフ G が与えられたときに，すべての頂点を連結し，かつ木であるような部分グラフのうち，もっともコストの総和が小さいもの（最小木）を求める問題を解くアルゴリズムである．

1. グラフ G の頂点一つ一つを独立した木とみなし，それらの木の集合 F を作成する．
2. すべての辺の集合 S を作成する．
3. S が空集合になるまで 4, 5 を繰り返す．
4. S からコスト最小の辺 x を取り出す．
5. もし x が F の中の異なる木をつないでいれば，その 2 つの木を x で連結して 1 つの木とする．そうでなければ（x が結ぶ頂点が両方とも同じ木に属していれば）何もしない．
6. 最終的に F には 1 つの木が残る．それが求める最小木である．

このアルゴリズムについて，以下の問いに答えよ．

(1) 上記のアルゴリズムによって得られる木が最小木であることを証明せよ．

(2) S のデータ構造としてどのようなものを使えば効率がよく上記の処理を行えるか，説明せよ．

(3) F のデータ構造としてどのようなものを使えば効率がよく上記の処理を行えるか，説明せよ．

(4) 上のアルゴリズムの計算量を求めよ．

Problem 2

The following pseudo-code describes an algorithm that finds a minimum-spanning tree of a connected undirected graph G with weighted edges, that is, a sub-graph that forms a tree that includes every vertex, where the total weight of all the edges in the tree is minimized.

1. Create a set of trees F, where each vertex in the graph G is a separate tree.
2. Create a set S containing all the edges in the graph G.
3. Repeat 4 and 5 until S becomes empty.
4. Remove an edge x with minimum weight from S.
5. If that edge x connects two different trees of F then combine the two trees into a single tree. Otherwise (if the two end vertices of x belong to a same tree), do nothing.
6. Only one component remains in F. It is the minimum spanning tree of the graph G.

Answer the following questions about the above algorithm.

(1) Prove that the algorithm correctly computes a minimum-spanning tree.

(2) Describe what kind of data structure should be used for S to run the algorithm efficiently.

(3) Describe what kind of data structure should be used for F to run the algorithm efficiently.

(4) Answer the computational complexity of the algorithm.

問題 3

コンピュータアーキテクチャにおける記憶階層とオペレーティングシステムによる仮想記憶管理に関して，以下の問いに答えよ．

(1) 記憶階層は，プログラムのどのような性質を元にして設計されているか．性質を 2 つあげよ．

(2) TLB (Translation Lookaside Buffer) は，仮想アドレス変換を高速にするためのアーキテクチャ支援機構である．TLB の仕組を述べよ．

(3) 以下のような記憶階層を持つ CPU およびプログラムを想定する．

物理メモリサイズ	32 MB
ページサイズ	4 KB
データキャッシュサイズ	32 KB
キャッシュ方式	物理アドレスによる 2 way set associative
ラインサイズ	128B
キャッシュ置換アルゴリズム	LRU

```
extern double read_data();
double a[4096], b[4096], c[4096];
void init_data()
{
 register int   i;
 for(i = 0; i < 4096; i++)
   b[i] = read_data();
 for(i = 0; i < 4096; i++)
   c[i] = read_data();
}
```

```
int main()
{
 register int   i;
 init_data();
 for (i = 0; i < 2048; i++)
  a[i] = b[i] + c[i] + c[i + 2048];
 return 0;
}
```

ただし，double 型は 8 バイト長とする．オペレーティングシステムおよび本プログラムのコード領域およびスタック領域は，物理メモリに常駐しているものとしスワップアウトされない．本プログラムのデータ領域として利用できる物理メモリは，0 番地から 16 ページ分とし，この領域のページ置換アルゴリズムは FIFO とする．init_data 関数実行後の物理メモリ上のデータ配置は以下のとおりとなる．

```
              +-------------------+            +-------------------+
    00000000 | b[0]～b[511]      |   32K 00008000 | c[0]～c[511]      |
 4K 00001000 | b[512]～b[1023]   |   36K 00009000 | c[512]～c[1023]   |
 8K 00002000 | b[1024]～b[1535]  |   40K 0000A000 | c[1024]～c[1535]  |
12K 00003000 | b[1536]～b[2047]  |   44K 0000B000 | c[1536]～c[2047]  |
16K 00004000 | b[2048]～b[2559]  |   48K 0000C000 | c[2048]～c[2559]  |
20K 00005000 | b[2560]～b[3071]  |   52K 0000D000 | c[2560]～c[3071]  |
24K 00006000 | b[3072]～b[3583]  |   56K 0000E000 | c[3072]～c[3583]  |
28K 00007000 | b[3584]～b[4095]  |   60K 0000F000 | c[3584]～c[4095]  |
              +-------------------+   64K 00010000 +-------------------+
```

上記プログラムの init_data 関数終了後からプログラムが終了するまでのページフォルト数およびキャッシュミス回数を求めよ．

Problem 3

Answer the following questions about the memory hierarchy in computer architectures and the virtual memory system in operating systems.

(1) The memory hierarchy is designed based on program's properties. Explain such two properties.

(2) TLB (Translation Lookaside Buffer) is an architectural support mechanism to improve the speed of virtual address translation. Explain the mechanism of TLB.

(3) Assume a CPU with the following memory hierarchy and the following program running in the CPU.

Physical Memory Size	32 MB
Page Size	4 KB
Data Cache Size	32 KB
Cache Mapping	2 way set associative based on physical address
Line Size	128B
Cache Replacement Algorithm	LRU

```
extern double read_data();
double a[4096], b[4096], c[4096];
void init_data()
{
 register int   i;
 for(i = 0; i < 4096; i++)
   b[i] = read_data();
 for(i = 0; i < 4096; i++)
   c[i] = read_data();
}
```

```
int main()
{
 register int   i;
 init_data();
 for (i = 0; i < 2048; i++)
  a[i] = b[i] + c[i] + c[i + 2048];
 return 0;
}
```

The size of the `double` type is eight bytes. Assume that the memory regions for the operating system, the above program code, and its execution stack reside in physical memory. That is, those memory regions are never swapped out. The data area of the above program can only be allocated in the physical memory area starting from address 0 and its size is 16 pages. When a data area accessed by the program cannot be allocated in that physical memory area, some pages of the area will be swapped out based on the FIFO page replacement algorithm. After the execution of the `init_data` function, the physical memory layout will be as follows:

```
             +-------------------+               +-------------------+
    00000000 | b[0]～b[511]      |  32K 00008000 | c[0]～c[511]      |
 4K 00001000 | b[512]～b[1023]   |  36K 00009000 | c[512]～c[1023]   |
 8K 00002000 | b[1024]～b[1535]  |  40K 0000A000 | c[1024]～c[1535]  |
12K 00003000 | b[1536]～b[2047]  |  44K 0000B000 | c[1536]～c[2047]  |
16K 00004000 | b[2048]～b[2559]  |  48K 0000C000 | c[2048]～c[2559]  |
20K 00005000 | b[2560]～b[3071]  |  52K 0000D000 | c[2560]～c[3071]  |
24K 00006000 | b[3072]～b[3583]  |  56K 0000E000 | c[3072]～c[3583]  |
28K 00007000 | b[3584]～b[4095]  |  60K 0000F000 | c[3584]～c[4095]  |
             +-------------------+  64K 00010000 +-------------------+
```

Calculate the number of page faults and cache misses after the `init_data` function execution until the program is terminated.