

平成18年度  
東京大学大学院情報理工学系研究科  
コンピュータ科学専攻  
入学試験問題  
数学

平成18年2月7日  
10:00 ~ 12:30

## 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開けないこと。  
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 2問すべてに答えよ。問いごとに指定された解答用紙を使用すること。  
Answer the following two problems. Use the designated answer sheet for each problem.
3. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。  
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること

受験番号	No.
------	-----

問題 1(100 点).

$n \times n$  対称行列  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (固有値はその重複度の回数だけ繰り返し現れる) とし, 対応する右固有ベクトル  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  は正規直交基底をなすとする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $x$  を  $n$  元列ベクトルとし,  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を  $x$  の  $\mathbf{u}_i$  が張る線形空間への射影とする. このとき任意の  $x$  に対して

$$x_i = P_i x$$

となるような,  $n \times n$  行列  $P_i$  を求めよ.

- (2)  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は  $P_i^\top = P_i$  かつ  $P_i^2 = P_i$  を満たすことを示せ.  
なお,  $P^\top$  は  $P$  の転置行列を表す.

- (3) 行列  $A$  が

$$A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

と表すことができることを示せ.

- (4) 正の整数  $m$  に対して  $A^m$  を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  と  $P_1, \dots, P_n$  で表せ.

- (5)  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  は 0 でなく,  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  は 0 である場合について,

$$\begin{aligned} ABA &= A \\ BAB &= B \\ (AB)^\top &= AB \\ (BA)^\top &= BA \end{aligned}$$

をすべてみたす行列  $B$  を  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  と  $P_1, \dots, P_n$  で表せ.

Problem 1(100 points).

Let  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  be the eigenvalues of a symmetric matrix  $\mathbf{A}$  of order  $n$  (the eigenvalues are repeated as many times as their multiplicities), and the set of the corresponding right eigenvectors  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  forms an orthonormal basis.

- (1) Let  $\mathbf{x}$  be a column vector of length  $n$ , and  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) be the projection of  $\mathbf{x}$  onto the linear space spanned by  $\mathbf{u}_i$ . Give the  $n \times n$  matrix  $\mathbf{P}_i$  that satisfies

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{x}$$

for any column vector  $\mathbf{x}$  of length  $n$ .

- (2) Show that  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) satisfies  $\mathbf{P}_i^\top = \mathbf{P}_i$  and  $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i$ , where  $\mathbf{P}^\top$  is the transpose of  $\mathbf{P}$ .

- (3) Show that  $\mathbf{A}$  can be expressed as

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{P}_n.$$

- (4) Express  $\mathbf{A}^m$  in terms of  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  and  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$  for  $m$  being a positive integer.

- (5) Assume that none of  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  is zero, and all of  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  are zeros. Give the matrix  $\mathbf{B}$  using  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  and  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$  that satisfies

$$\begin{aligned} \mathbf{ABA} &= \mathbf{A}, \\ \mathbf{BAB} &= \mathbf{B}, \\ (\mathbf{AB})^\top &= \mathbf{AB}, \\ (\mathbf{BA})^\top &= \mathbf{BA}. \end{aligned}$$

問題 2(100 点).

ガンマ関数  $\Gamma(x)$  を  $x > 0$  に対して

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad [1]$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^3} dx$$

をガンマ関数で表せ．

(2) 式 [1] の右辺を部分積分することにより

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad [2]$$

を示せ．

(3) 1 以上の任意の整数  $n$  に対して

$$\Gamma(n+1) = n!$$

が成り立つことを示せ．

(4)  $n$  を 1 以上の整数,  $0 < x \leq 1$  とする． $0 \leq t \leq n$  に対して成り立つ不等式  $t \cdot n^{x-1} \leq t^x \leq n^x$  および  $t \geq n$  に対して成り立つ不等式  $t \cdot n^{x-1} \geq t^x \geq n^x$  を積分

$$\Gamma(x+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+n-1} dt$$

に適用して以下の不等式を示せ．

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^n dt + \int_n^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \\ \leq \frac{\Gamma(x+n)}{n^x} \leq \int_0^n e^{-t} t^{n-1} dt + \frac{1}{n} \int_n^{\infty} e^{-t} t^n dt \end{aligned} \quad [3]$$

(5) 式 [3] を部分積分して

$$(n-1)!(1-\epsilon_n) \leq \frac{\Gamma(x+n)}{n^x} \leq (n-1)!(1+\epsilon_n) \quad [4]$$

を示せ．ただし  $\epsilon_n = n^n / (n!e^n)$  である．

(6) 式 [4] と式 [2] から  $0 < x$  に対して

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

が成り立つことを示せ．ただしスターリングの公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

を用いてよい．

Problem 2(100 points).

Gamma function  $\Gamma(x)$  is defined for  $x > 0$  by

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad [1]$$

Answer the following questions.

(1) Represent the integral

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^3} dx$$

using Gamma function.

(2) Show

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad [2]$$

from equation [1] using integration by parts.

(3) Show

$$\Gamma(n+1) = n!$$

for  $n$  being any positive integer.

(4) Let  $n$  be a positive integer and  $0 < x \leq 1$ . Apply the inequalities  $t \cdot n^{x-1} \leq t^x \leq n^x$  and  $t \cdot n^{x-1} \geq t^x \geq n^x$ , which are valid for  $0 \leq t \leq n$  and  $t \geq n$ , respectively, to the integral

$$\Gamma(x+n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+n-1} dt,$$

and show

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^n dt + \int_n^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \\ & \leq \frac{\Gamma(x+n)}{n^x} \leq \int_0^n e^{-t} t^{n-1} dt + \frac{1}{n} \int_n^{\infty} e^{-t} t^n dt. \end{aligned} \quad [3]$$

(5) Show

$$(n-1)!(1-\epsilon_n) \leq \frac{\Gamma(x+n)}{n^x} \leq (n-1)!(1+\epsilon_n) \quad [4]$$

from equation [3] using integration by parts, where  $\epsilon_n = n^n/(n!e^n)$ .

(6) Using equations [4] and [2], show for  $x > 0$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

where you may use Stirling's formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

平成18年度  
東京大学大学院情報理工学系研究科  
コンピュータ科学専攻  
入学試験問題  
専門科目 I

平成18年2月8日  
10:00 ~ 12:30

## 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.  
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 4問すべてに答えよ. 問いごとに指定された解答用紙を使用すること.  
Answer the following four problems. Use the designated answer sheet for each problem.
3. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.  
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.

Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.
------	-----

問題 1(100 点).

$n \times n$  の 3 重対角行列  $T$  が, ピボット選択なしに LU 分解されると仮定する.

$$T = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \\ 0 & & & & a_n & b_n & \end{pmatrix} = LU$$

ただし,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ l_2 & 1 & & & & & \\ & l_3 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & & & l_n & 1 & & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & & & & 0 \\ & d_2 & u_2 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & d_{n-1} & u_{n-1} & & \\ 0 & & & & & d_n & \end{pmatrix}$$

である. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$  を  $\{l_i\}, \{d_i\}, \{u_i\}$  で表せ.
- (2)  $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$  が与えられたとき,  $\{l_i\}, \{d_i\}, \{u_i\}$  を求めるアルゴリズムを示せ.
- (3)  $\tau_0 = 1,$

$$\tau_i = \prod_{k=1}^i d_k \quad (1 \leq i \leq n)$$

としたとき,  $\{\tau_i\}$  が満たす線形漸化式を求めよ. ただし, 漸化式の係数は,  $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$  のみを使うこと.

- (4) さらに

$$t_i = \begin{pmatrix} \tau_i \\ \tau_{i-1} \end{pmatrix}$$

とおくとき,

$$t_i = A_i t_{i-2}$$

(最後は添え字が  $i-2$  であることに注意) となるような行列  $A_i$  を  $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$  のみを使い求めよ.

Problem 1(100 points).

Assume that an  $n \times n$  tridiagonal matrix  $T$  allows LU decomposition without pivoting as

$$T = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} = LU,$$

where

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ l_2 & 1 & & & & \\ & l_3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & l_n & 1 & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & & & 0 \\ & d_2 & u_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & u_{n-1} & \\ 0 & & & & d_n & \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

- (1) Express  $\{a_i\}$ ,  $\{b_i\}$ , and  $\{c_i\}$  in terms of  $\{l_i\}$ ,  $\{d_i\}$ , and  $\{u_i\}$ .
- (2) Show an algorithm to compute  $\{l_i\}$ ,  $\{d_i\}$ , and  $\{u_i\}$  from given  $\{a_i\}$ ,  $\{b_i\}$ , and  $\{c_i\}$ .
- (3) Let  $\tau_0 = 1$  and

$$\tau_i = \prod_{k=1}^i d_k \quad (1 \leq i \leq n),$$

and give the linear recurrence relation using  $\{a_i\}$ ,  $\{b_i\}$ , and  $\{c_i\}$  that  $\{\tau_i\}$  satisfies.

- (4) Let

$$\mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} \tau_i \\ \tau_{i-1} \end{pmatrix}$$

and give the matrix  $A_i$  using  $\{a_i\}$ ,  $\{b_i\}$ , and  $\{c_i\}$  that satisfies

$$\mathbf{t}_i = A_i \mathbf{t}_{i-2}$$

(note that the last suffix is  $i - 2$ ).



問題 2(100 点).

以下の問いに答えよ .

- (1) 整数型の要素を持つ配列と , その要素数を示す 1 以上の整数を受け取り , 整数を返す次の関数を考える .

```
int f(int a[], int n) {
    int x = a[0];
    int i;
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (a[i] >= x)
            x = a[i];
    }
    return x;
}
```

この関数を実行すると , 受け取った配列の要素の最大値を返すということ , すなわち関数が戻る直前で , 論理式

$$\left(\forall j \in \{0, \dots, n-1\}. x \geq a[j]\right) \wedge \left(\exists j \in \{0, \dots, n-1\}. x = a[j]\right)$$

が満たされることを帰納法を用いて証明せよ .

問い (2) は次ページ .

(2) 整数型を要素に持つ配列と，その添字を表す2つの整数を受け取る次の関数を考える．

```
void qsort(int a[], int left, int right) {
    int i, p, j;
    if (left >= right) return;
    p = a[left];
    i = left;
    j = right;
    while(i <= j) {
        if (a[i] < p) i++;
        else if (a[j] >= p) j--;
        else {
            swap(a, i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    qsort(a, left, i - 1);
    if (j + 1 == left) qsort(a, j + 2, right);
    else qsort(a, j + 1, right);
}
```

ただし，swap は，配列 a の要素 i の値と要素 j の値を交換する関数として定義されているとする．関数 qsort を実行後，配列 a の要素 left から right までがソートされていること，すなわち論理式

$$\forall k \in \{\text{left}, \dots, \text{right} - 1\}. a[k] \leq a[k + 1]$$

が満たされること（これを性質 1 と呼ぶ）を証明したい．

- (a) この関数中の while 文直後に成り立ち，かつ性質 1 を示すのに十分な性質を論理式で書け．ただし，この論理式の変数として，while 文直後で有効なプログラム中の変数を用いてもよい．
- (b) (a) で示した論理式が実際に while 文直後で成り立つことを帰納法を用いて証明せよ．
- (c) 性質 1 を帰納法を用いて証明せよ．

Problem 2(100 points).

Answer the following questions.

- (1) Consider the following function, which takes as arguments an array of integers and a non-zero integer value indicating the size of the array, and returns an integer value.

```
int f(int a[], int n) {
    int x = a[0];
    int i;
    for (i = 1; i < n; i++) {
        if (a[i] >= x)
            x = a[i];
    }
    return x;
}
```

Prove by using induction that the result of the function is the maximum of the elements of the given array, that is, that the following logical formula is satisfied just before the function returns.

$$\left(\forall j \in \{0, \dots, n-1\}. x \geq a[j]\right) \wedge \left(\exists j \in \{0, \dots, n-1\}. x = a[j]\right)$$

Question (2) is shown in the next page.

- (2) Consider the following function, which takes as arguments an array of integers and two integer values indicating indices of the array.

```
void qsort(int a[], int left, int right) {
    int i, p, j;
    if (left >= right) return;
    p = a[left];
    i = left;
    j = right;
    while(i <= j) {
        if (a[i] < p) i++;
        else if (a[j] >= p) j--;
        else {
            swap(a, i, j);
            i++;
            j--;
        }
    }
    qsort(a, left, i - 1);
    if (j + 1 == left) qsort(a, j + 2, right);
    else qsort(a, j + 1, right);
}
```

Here, we assume that `swap` is defined as a function that exchanges the values of the index `i` and the index `j` of the array `a`. Now, we would like to prove that, after executing the function `qsort`, the values of the array `a` between the indices `left` and `right` are sorted, that is, the following logical formula is satisfied. (We call it “property 1.”)

$$\forall k \in \{\text{left}, \dots, \text{right} - 1\}. a[k] \leq a[k + 1]$$

Answer the following questions.

- What is a logical formula that holds right after the `while` statement in the function and that is sufficient for proving the property 1? Here, you can use, as free variables of the logical formula, the variables valid right after the `while` statement.
- Prove by using induction that the logical formula answered in (a) holds right after the `while` statement.
- Prove the property 1 by using induction.

問題 3(100 点).

$L$  を有限アルファベット  $\Sigma$  上の言語とする. このとき, 記号列  $x, y \in \Sigma^*$  に対して, 次の条件が成立するとき  $x \equiv_L y$  と定義する.

- すべての  $z \in \Sigma^*$  に対して  $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$  となる.

このように定義される  $\Sigma^*$  上の 2 項関係  $\equiv_L$  について, 以下の問いに答えよ.

(1)  $\equiv_L$  は  $\Sigma^*$  上の同値関係であることを証明せよ.

(2)  $\equiv_L$  は, 次の性質を満たすことを証明せよ.

$x \equiv_L y$  ならば, すべての  $z \in \Sigma^*$  に対して  $xz \equiv_L yz$

(3) 次の 2 つの命題は同値であることを証明せよ.

(a)  $L$  は正則である.

(b)  $\equiv_L$  の同値類の個数は有限である.

Problem 3(100 points).

Let  $L$  be a language over a finite alphabet  $\Sigma$ . We denote  $x \equiv_L y$  for strings  $x, y \in \Sigma^*$  if the following condition holds:

- $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$  for all  $z \in \Sigma^*$ .

For the binary relation  $\equiv_L$  over  $\Sigma^*$ , answer the following questions:

(1) Prove that  $\equiv_L$  is an equivalence relation on  $\Sigma^*$ .

(2) Prove that  $\equiv_L$  has the following property: If  $x \equiv_L y$ , then  $xz \equiv_L yz$  for all  $z \in \Sigma^*$ .

(3) Prove that the following two statements are equivalent.

(a)  $L$  is regular.

(b) The number of equivalence classes of  $\equiv_L$  is finite.

問題 4(100 点).

保護について，以下の問いに答えよ．

- (1) 以下の 2 つの用語を使用して，オペレーティングシステムがメモリ保護機能をどのように実現しているか説明せよ．
  - CPU の実行モード (カーネルモード / ユーザモード)
  - MMU によるアドレス変換機構
- (2) アクセス制御リスト方式とケイパビリティリスト方式の 2 つの方式の概要と実例を述べよ．また，両者の利害得失を論ぜよ．
- (3) 上記の保護機能では対処できないセキュリティ攻撃の例を一つ挙げよ．また，その攻撃に対処するための保護機構を説明せよ．

Problem 4(100 points).

Answer the following questions on protection.

- (1) Describe memory protection provided by operating systems using the following two terms:
  - CPU execution mode (kernel/user mode)
  - Address translation mechanism in MMU
- (2) Describe access control list and capability list and show their examples used in real systems. Discuss advantages and disadvantages of those two methods.
- (3) Show an example of security attack which is not protected by the above protection mechanisms. Describe a protection mechanism that overcomes the problem.

平成18年度  
東京大学大学院情報理工学系研究科  
コンピュータ科学専攻  
入学試験問題  
専門科目 II

平成18年2月8日  
14:00 ~ 16:30

## 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開けないこと。  
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.
2. 4問すべてに答えよ。問いごとに指定された解答用紙を使用すること。  
Answer the following four problems. Use the designated answer sheet for each problem.
3. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。  
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること。

Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.
------	-----

問題 1(100 点).

二種類の品物  $A$  と  $B$  のどちらか一つが入れている  $n$  個 ( $n > 1$ ) の箱があるとする. このうち品物  $A$  の入っている箱の数は  $m$  であることがわかっているが, それらがどの箱であるかはわかっていない. これらの箱に対し, ある機械  $X$  は, 2 つの箱を比較し, その 2 つの箱に同じものが入っているかどうかを判定する. しかし, 2 つの箱の両方ともに品物  $B$  が入っている場合には機械  $X$  が誤作動を起こす可能性があり, 正しい結果を返さない場合があるものとする. すなわち,  $B$  が入っている 2 つの箱を  $X$  を用いて比較した場合, 両者の内容が同じであると正しく判定する場合もあれば, 逆の判定を出す場合もある. なお, それ以外の箱の内容の組み合わせで機械  $X$  が誤作動することはないものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $0 < m \leq n/2$  とする. このとき, たとえすべての箱の 2 つずつの組み合わせに対して機械  $X$  による比較を行っても, すべての箱についてそれぞれどちらの品物が入っているか決定できるとは限らないことを示せ. なお, 特定の 2 つの箱の組み合わせを検査するのは一度きりであるものとする.
- (2)  $m > n/2$  とする. このとき, 品物  $A$  が入っている箱を半分より多く含み,  $\lceil n/2 \rceil$  個以下の箱からなる集合を, 機械  $X$  を  $\lfloor n/2 \rfloor$  回用いることによって選び出す方法を述べよ.
- (3)  $m > n/2$  とする. このとき, 機械  $X$  を  $O(n)$  回用いるだけで, 常にすべての箱の中身を決定することができることを示せ.

Problem 1(100 points).

We have  $n$  ( $n > 1$ ) boxes, each of which contains either an item  $A$  or an item  $B$  as its content. We know in advance that the number of boxes containing  $A$  is some fixed number  $m$ , but we do not know which they are. We also have a machine  $X$  that checks whether a pair of boxes have the same contents. However, the machine  $X$  could return incorrect answers when both boxes have items  $B$  inside. That is, when two boxes contain items  $B$ , the machine sometimes says that the two boxes contain the same items but other times says that the two boxes contain different items. In other cases, the machine  $X$  always gives correct answers. Answer the following questions.

- (1) Let  $0 < m \leq n/2$ . Show that there are cases in which we cannot determine the content of each box even if we check all the pairs of boxes with the machine  $X$ . Assume that we check each pair of boxes only once.
- (2) Let  $m > n/2$ . Describe a method that uses the machine  $X$  exactly  $\lfloor n/2 \rfloor$  times for choosing a set of boxes such that the number of the chosen boxes is less than or equal to  $\lceil n/2 \rceil$  and more than half of them have  $A$  as their contents.
- (3) Let  $m > n/2$ . Show that we can always determine the contents of all the boxes by using the machine  $X$  only  $O(n)$  times.



問題 2(100 点).

無限に遠い光源に照らされた  $xyz$  空間内の拡散曲面について, 各点での明るさと法線ベクトルとの関係について考える. 拡散反射する曲面のある点での明るさは, その点での法線と光源方向のなす角の余弦に比例するものとする. 比例定数は  $C (> 0)$  とする. 法線ベクトルを  $(p, q, 1)$ , 光源方向ベクトルを  $(p_s, q_s, 1)$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 光源方向ベクトルが  $(0, 0, 1)$  であるとき,  $p$ - $q$  平面における拡散反射の明るさの等高線は, 原点を中心とする同心円となることを示せ.
- (2) 光源方向  $(p_s, q_s, 1)$  が任意である場合について, 拡散反射の明るさを計算する式を示せ.
- (3) 光源方向  $(p_s, q_s, 1)$  が任意である場合, 明るさがゼロとなる  $p$ - $q$  平面上の点の集合を求めよ.
- (4) 光源方向  $(p_s, q_s, 1)$  が任意である場合, 明るさが最大となる  $p$ - $q$  平面上の点の座標を求めよ.

Problem 2(100 points).

Consider the relation between the intensity (brightness) and the normal vector at a point on a curved diffuse surface illuminated by an infinite light source, in the  $xyz$  space. Assume that the intensity at a point on a curved diffuse surface is proportional to the cosine of the angle between the normal at that point and the light vector, where the constant of proportionality is  $C (> 0)$ . Also, assume that the surface normal vector is  $(p, q, 1)$  and the light vector is  $(p_s, q_s, 1)$ . Answer the following questions.

- (1) Show that, if the light vector is  $(0, 0, 1)$ , then the iso-intensity curves on the  $p$ - $q$  plane are concentric circles with the origin as the center.
- (2) Obtain the expression for the intensity with the light vector  $(p_s, q_s, 1)$  being arbitrary.
- (3) Give the set of points on that the intensity is zero, in the  $p$ - $q$  plane, with the light vector  $(p_s, q_s, 1)$  being arbitrary.
- (4) Give the coordinate of the point that gives the maximum intensity in the  $p$ - $q$  plane, with the light vector  $(p_s, q_s, 1)$  being arbitrary.

問題 3(100 点).

探索アルゴリズムについて，以下の問いに答えよ．

- (1) 幅優先探索および深さ優先探索とはどのようなものか，それぞれのアルゴリズムの概略をスタック，キューを使って記述せよ．
- (2) 幅優先探索および深さ優先探索において，スタックあるいはキューに保存されるノード数の最大値を求めよ．ただし，分岐数を  $b$  とし，解は深さ  $d$  のレベルに 1 つだけ存在するものとする．なお，深さ優先探索においては，解の深さ  $d$  があらかじめ知らされていると仮定せよ．
- (3) 問い (2) と同様の条件の下で，幅優先探索および深さ優先探索において，解が見つかるまでに訪問するノードの総数の平均値を求めよ．
- (4) 解の深さ  $d$  があらかじめ知らされていない場合，深さ優先探索ではどのような困難が生じるかを説明せよ．また，この困難を避けるための探索法としての反復深化法を説明せよ．

Problem 3(100 points).

Answer the following questions concerning search algorithms.

- (1) Explain how the breadth-first and the depth-first search algorithms work and describe these algorithms by using stack and queue data structures.
- (2) Give the maximum number of the nodes stored in the stack or queue in each of the breadth-first and the depth-first searches. Assume that the branching factor is  $b$  and that a single goal exists at depth  $d$ . Also assume that depth  $d$  is known in advance in the depth-first algorithm.
- (3) Give the average number of nodes to examine before reaching the goal in each of the breadth-first and the depth-first searches under the same assumptions in (2).
- (4) Explain what difficulties the depth-first algorithm would encounter if the depth  $d$  of the goal were not known in advance. Explain an algorithm called *iterative deepening* to avoid the difficulties.

問題 4(100 点).

以下に示す手順で, 組合せ論理回路として AND, OR, NOT ゲートを用いて, 16 ビットデータ幅の左論理シフト回路を設計せよ. シフト回路は, データ入力として,  $I_0, I_1, \dots, I_{15}$ , シフト距離指定入力として,  $S_0, S_1, \dots, S_4$ , シフト出力として,  $O_0, O_1, \dots, O_{15}$ , とし, 以下の式を満たすものとする.

$$S = S_0 + 2 \times S_1 + 4 \times S_2 + 8 \times S_3 + 16 \times S_4$$
$$O_i = \begin{cases} I_{i-S} & \text{if } (i-S) \geq 0 \\ 0 & \text{if } (i-S) < 0 \end{cases}$$

- (1) 4 ビットデータ入力, 3 ビットシフト距離指定入力のシフト回路を組合せ論理回路で設計せよ. シフトは左論理シフトだけを実現する. シフト出力データ幅は, 8 ビットとすること.
- (2) 問い (1) で設計した 4 ビットデータの左論理シフト回路と, もし必要なら AND, OR, NOT ゲートを用いて, 16 ビットデータ幅の左論理シフト回路を設計せよ.

Problem 4(100 points).

Construct a combinatorial logic circuit of logical left shift whose data width is 16 bits using AND, OR, and NOT gates. Let the input data be  $I_0, I_1, \dots, I_{15}$ , the shift length be  $S_0, S_1, \dots, S_4$ , and the output be  $O_0, O_1, \dots, O_{15}$ . The following expressions should be satisfied:

$$S = S_0 + 2 \times S_1 + 4 \times S_2 + 8 \times S_3 + 16 \times S_4$$
$$O_i = \begin{cases} I_{i-S} & \text{if } (i-S) \geq 0 \\ 0 & \text{if } (i-S) < 0 \end{cases}$$

- (1) Construct a combinatorial logic circuit of logical left shift whose input, shift length, and output have widths 4 bits, 3 bits, and 8 bits, respectively.
- (2) Construct a logic circuit of 16-bit logical left shift using copies of the 4-bit shift circuit designed in (1). Additional AND, OR, and NOT gates may be used if necessary.