細分割の特異点

RA 川原田寛

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概 要

工業製品をつくるための CAD や CAM，コンピュータグラフィクス（CG）でのモデルデータの設計など，形状に関する分野は幅広い．よって形状を扱う手法を整えることは大切な問題であり，特に形状を表現する手法の構築はその最も基礎となる部分である．本研究は，形状表現のうち物体の表面である曲面を生成する手法を開発することを目的とする．

1 はじめに

形状表現の手法として有名なものに，パラメトリック曲面とポリゴンメッシュがある．パラメトリック曲面とは 2 パラメータの関数でもって曲面を表現する手法で，滑らかな曲面を扱いやすいが任意位相の曲面を関数で表現することは容易ではなかった．一方ポリゴンメッシュとは多角形を張り合わせた区分線形曲面のことで，滑らかではないが任意の形状を容易に近似できるという特性を持っている．これらの手法の問題点を解決した手法が細分割（subdivision）[5] と呼ばれるものである．細分割とは任意の二多様体であるメッシュに対して施す繰り返し的な操作で，無限回施すと滑らかな曲面を生成する手法である．図 1 を見てもらいたい．このように曲面が生成されていく際に位相は変更されない，つまり初期のメッシュを任意の形状に合わせて作っておけば，任意位相の滑らかな曲面を細分割は生成することが出来るのである．

細分割は優れた手法で，1956 年 De Rham により発見された．その後 1974 年に Chaikin により実装されて認知されはじめ，1978 年に最も有名な細分割である Cutmull-Clark の細分割が発表された．細分割はメッシュの connectivity の変化と細分割後の頂点位置を定める細分割行列によって定義され，細分割によって生成された曲面が滑らかであるかどうかは細分割行列に依存する．

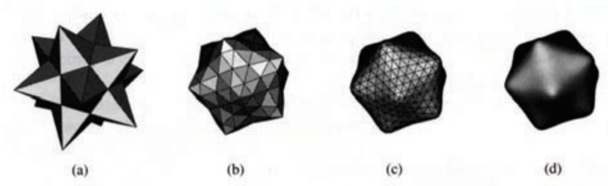

図 1: Loop subdivision [4].

Cutmull-Clark の細分割は C^1 級連続な曲面を生成することが保証されているが，C^k 級連続になるために細分割行列に課される必要十分条件は細分割最大の難問であり，1994 年に Reif [3] が C^1 級連続の十分条件，1995 年に Prautzsh [2] が C^k 級連続の必要条件と十分条件を出したが，2000 年に Zorin [6] が C^k 級連続の必要十分条件導出するまで未解決であった．しかし Zorin の導出した必要十分条件はある仮定の下での条件であり完全ではなかった．また，これらの解析は非常に複雑な議論を要しており直感的とは言い難かった．

2 細分割の C^k 級連続必要十分条件

これに対し，私は細分割の必要十分条件を直感的かつ何も仮定をおかずに導出することに成功した．その基本的アイデアは細分割を差分法の一種と見ることよって得られる差分ベクトルの微分へ

の収束である．今，細分割の一ステップは

$$\begin{pmatrix} v_0^{j+1} \\ v_1^{j+1} \\ \vdots \\ v_k^{j+1} \end{pmatrix} = S_k \begin{pmatrix} v_0^{j} \\ v_1^{j} \\ \vdots \\ v_k^{j} \end{pmatrix}$$

として書かれる（図 2 参照）．ここで，k は中心の頂点の次数を表している．

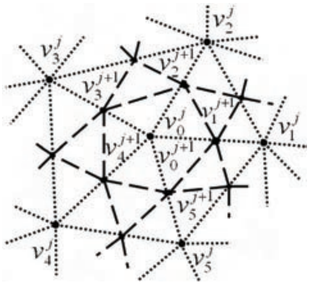

図 2: 細分割行列.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

なる行列 Δ を用いると，

$$\begin{pmatrix} v_0^{j+1} \\ v_1^{j+1} - v_0^{j+1} \\ \vdots \\ v_k^{j+1} - v_0^{j+1} \end{pmatrix} = D'_k \begin{pmatrix} v_0^{j} \\ v_1^{j} - v_0^{j} \\ \vdots \\ v_k^{j} - v_0^{j} \end{pmatrix}$$

なる関係を得る．ここで，$D'_k = \Delta S_k \Delta^{-1}$．さらに細分割がアフィン不変であることを仮定すると，

$$D'_k = \left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & D_k \\ 0 & \end{array}\right)$$

であるから，$d^j = \begin{pmatrix} v_1^{j} - v_0^{j} \\ \vdots \\ v_k^{j} - v_0^{j} \end{pmatrix}$ とすると，$d^{j+1} = D_k d^j$ となる．d^j は頂点同士の差分によるベクトルで差分ベクトルと呼ぶ．D_k はそれを細分している行列であり，よってこの関係を差分スキームと呼ぶ．この差分スキームにおいて，差分ベクトルは極限で一階微分に収束することが明らかであり，よって行列 D_k を解析することによって C^1 級連続性の必要十分条件を得た．

この考え方を拡張し，2 階差分ベクトルと 2 階差分スキームを導出した．これを解析することによって C^2 級連続性の必要十分条件を得た．同様に C^k 級連続性の必要十分条件を得ることができる．

上記の解析は細分割曲面の特異点における解析である．しかし，特異点以外でもその条件は有効であることも示した [1].

3 細分割曲面の法線

上記の解析の副産物として細分割曲面の厳密な法線ベクトルを求めることが可能となった．図 3 はある頂点の細分割曲面上の極限位置（v_0^∞）における厳密な法線ベクトルを表している．

図 3: ある頂点の極限法線ベクトル.

参考文献

[1] Hiroshi Kawaharada and Kokichi Sugihara. C^k-continuity of stationary subdivision schemes. METR 2006-01, The University of Tokyo, January 2006.

[2] H. Prautzsch. Analysis of C^k-subdivision surfaces at extraordinary points. *Preprint. Presented at Oberwolfach*, June 1995.

[3] U. Reif. A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary points. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 153–174, 1995.

[4] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, and David H. Salesin. *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications.* Morgan Kaufmann Publishers, 1996.

[5] Joe Warren and Henrik Weimer. *Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach.* Morgan Kaufmann Publishers, 1995.

[6] Denis Zorin. Smoothness of stationary subdivision on irregular meshes. *Constructive Approximation*, Vol. 16, No. 3, pp. 359–397, 2000.