

# 符号可解線形計画の組合せ的解法

RA 垣村尚徳

情報理工学系研究科数理情報学専攻

## 概要

本研究では、

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && cx \\ & \text{subject to} && Ax = b, \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

という形の線形計画問題と呼ばれる最適化問題を扱う。線形計画問題は、オペレーションズ・リサーチを始めとする様々な工学的諸分野で現れる基本的な最適化問題である。実際の問題を線形計画を用いて定式化する際、 $A, b, c$ などの入力パラメータを推定し適切に設定する必要がある。しかし、パラメータの正確な数値化が困難である場合が実際の問題には多く現れる。一方で、係数要素の正負や大小関係などは容易に分かる場合が多い。そこで、与えられた係数要素の正負零という組合せ的情報(符号パターン)のみから分かる線形計画問題の定性的性質を解析することが有用となる。この解析は、数値情報を用いないため入力誤差などの外乱に強いロバストな解析手法といえる。

本研究では、入力の数値によらずに最適解の取りうる符号パターンが一意に定まる線形計画問題のクラスを定めた。さらに、そのクラスに属する線形計画問題に対して、その最適基底を係数の符号パターンのみから求める組合せ的な多項式時間解法を与えた。

## 1 定性的行列理論

行列の要素の符号情報のみから分かる性質を調べる研究は、定性的行列理論と呼ばれ、経済モデルを扱うために Samuelson によって提唱された。

以降、Brualdi, Shaderによる線形方程式系に対する定性的解析 [1] など様々な研究がなされてきた。

定性的行列理論における重要な判定問題の一つに、行列要素の大きさによらず正則かどうか(符号正則性)を判定する問題がある。この問題は、多くの組合せ的問題と等価であり、1999年に Robertson, Seymour, Thomas [3] によって多項式時間で判定可能であることが示された。一方、一般に長方形行列がその要素の大きさによらずに行フルランクか判定する問題は coNP 完全である。

行列  $A$  に対して有向二部グラフ  $G(A) = (U, V; E)$  を以下のように定義する。二部グラフの頂点集合  $U, V$  をそれぞれ  $A$  の行集合、列集合とし、枝集合を  $E = \{(i, j) \mid a_{ij} \neq 0\}$  と定義する。枝  $e = (i, j) \in E$  は、 $a_{ij} > 0$  ならば  $i \in U$  から  $j \in V$  に、 $a_{ij} < 0$  ならば  $j \in V$  から  $i \in U$  に向き付けられているとする。たとえば、次の  $3 \times 4$  次行列と二部グラフとの対応は、以下の図のようになる。

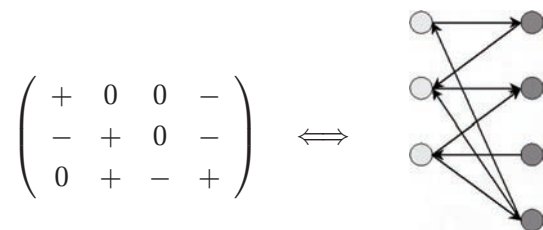


図 1: 行列と二部グラフ

行列  $A$  が符号正則ならば、かつそのときに限り、それに対応する有向二部グラフ  $G(A)$  が Pfaffian orientation と呼ばれる特殊な構造を持つことが知られている。

## 2 線形計画問題の符号可解性

線形計画問題  $\max\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$  が符号可解であるとは、最適解の取りうる符号パターン集合が与えられた係数要素の大きさによらず一意に定まることをいう。本研究では、まず、与えられた線形計画問題の符号可解性の判定が coNP 完全であることを示した。

$m \times n$  次長方形行列が完全符号正則であるとは、大きさが  $m$  の任意の部分行列の行列式の符号が要素の大きさによらず一意に定まることを言う。行列  $A$  が完全符号正則ならば、かつそのときに限り、 $A$  のカーネルの取りうる符号パターン集合が一意に定まる [2]。行列の完全符号正則性判定は、Robertson, Seymour, Thomas [3] の符号正則性判定を利用することで多項式時間判定可能である。

線形計画問題  $\max\{cx \mid Ax = b, x \geq 0\}$  が完全符号正則であるとは、

$$A_p = (A \ -b), \quad A_d = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

が共に完全符号正則であることを言う。線形計画問題が完全符号正則ならば、主実行可能解と双対実行可能解の取りうる符号パターン集合が共に、与えられた係数要素の大きさによらず一意に定まることが言える。さらに、完全符号正則な線形計画問題は符号可解であることを示した。

## 3 符号可解線形計画の組合せ的解法

完全符号正則な線形計画問題に対して、係数の符号パターンのみからその最適基底を構成する多項式時間解法を与える。完全符号正則行列に対応する二部グラフが持つ特殊な構造を利用することで、数値情報を用いずに組合せ的に計算できる。

まず、完全符号正則な線形計画問題に対する実行可能性判定が線形時間で計算できることを示した。行列  $A_p$  に対して、その係数要素の符号パターンを基に適当に行置換と列置換を行なうと、以下のような階段構造を得ることができる。

左上 3 つの斜線部は各行に正負どちらか一方の非零要素のみがある部分行列であり、一番右下の

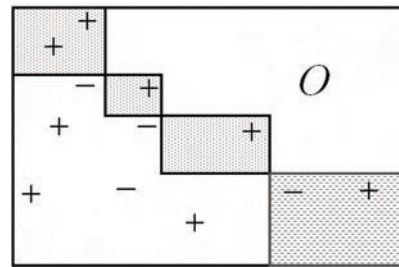


図 2: 行列の符号パターンに基づく階段構造

斜線部は各行に正負両方の非零要素がある部分行列である。行列  $A_p$  の列  $-b$  の階段構造における位置によって、実行可能性を判定できる。

次に、完全符号正則である実行可能な線形計画問題の最適基底を構成する方法について述べる。行列

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -c & 0 \\ 0 & A & -b \end{pmatrix}$$

に対応する二部グラフ  $G(L)$  を考え、上記の階段構造を再び利用することでよいパスを見つける。そして、パスを基により小さな線形計画問題に帰着することで、最適基底を再帰的に構成できる。全体の計算量は  $O(m\gamma)$  時間 ( $m$  は  $A$  の行数、 $\gamma$  は非零要素数) である。実際の問題には非零要素数が少ない疎な線形計画問題が多く現れ、この手法を用いることで高速に計算できる。このように、入力誤差など外乱に対してロバストに最適基底を得ることができる計算手法を設計した。

## 参考文献

- [1] R. A. Brualdi and B. L. Shader: *Matrices of Sign-solvable Linear Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [2] S.-J. Kim and B. L. Shader: Linear systems with signed solutions, *Linear Algebra and Its Applications*, 313, pp. 21–40, 2000.
- [3] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas: Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits, *Annals of Mathematics*, 150, No. 3, pp. 929–975, 1999.