非線形力学系の過渡過程による分岐解析と不安定周期解検出法

RA 安東弘泰

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概 要

本報告ではまず, 1 次元力学系に着目し, その過渡的振る舞いを利用する解析法によって分岐現象をみる. 次に, 同様の解析法を用いて, 不安定周期解の検出方法を紹介する. ここで, 不安定周期解はカオスアトラクタの骨格をなす重要な情報を含んでいる. さらに, 一般的な 1 次元系の周期解検出法に対する有効性を説明する. 最後にこの解析法のロバスト性を考察する.

1 はじめに

本研究では, 力学系における過渡過程に注目し, それにより分岐解析と不安定周期解検出法を提案する. まずここでは, 過渡過程という言葉で, 初期状態からのある一定時間における系の振る舞いのことを意味する. つまり, 過渡過程を含む初期数ステップの力学系の振る舞いと定義する. 次に, 分岐解析はパラメータ変化による力学系の解の質的変化をとらえるもである. また, 不安定周期解は, カオスアトラクタに埋め込まれており, カオスダイナミクスの重要な特徴量としてのフラクタル次元, リアプノフ指数, 位相的エントロピーなどを求めるのに利用される [1]. さらに, 実験データから周期解を検出することは, そのデータの背後に決定論性を主張する手立てとなる.

ところで, このような不安定周期解の検出問題では, p 回写像の不動点として p 周期の解を求める. これを 1 次元写像系で考えると, p 回写像のリターンマップと 45 度線の交点を求める問題になる. しかしながら, 単純に考えれば, この方法は p 周期解すべての点を求めることになってしまう. そこで本研究では, この p 周期点を求める際にその最大値にのみ注目し, かつ過渡過程を利用することで, 網羅的に p 周期以下の解すべてを求める方法を提案する. そして, この方法は, システムの具体的な形に依存しないので, 多様なモデルに対してロバストに適用できる.

2 過渡過程による分岐解析

典型的な 1 次元単峰写像であるロジスティック写像: $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \equiv f(x_n)$, $x \in [0, 1]$, $a \in [0, 4]$ について考える. ここでは次の手順により過渡過程を用いて分岐現象をみる. $\langle 1\rangle$ 過渡過程を観測する時間 T を決める. $\langle 2\rangle$ 初期条件 $x(0), a$ を決める. $\langle 3\rangle$ $x(0)$ に写像 f を T 回適用する. $\langle 4\rangle$ 時系列 $\{x_n\}_{1\leq n\leq T}$ の最大値までの写像回数を N とする. この手順をいくつかの初期条件 $x(0)$, a に関して実行する. これにより得られるダイアグラムを図 1（左）に示す (T=7 の場合). またこれを BBmap と呼ぶ.

BBmap において, N_1 回の領域と N_2 回の領域の境界線を考える. ここで, $N_1 > N_2$ とする. この境界線は, BBmap の定義から, $f^{N_1}(x, a) = f^{N_2}(x, a)$ と表せる. つまり, BBmap における境界線は各々の領域の表す写像回数の差 $(N_1 - N_2)$ を周期とする周期解の最大値の逆像の, パラメータに対する軌跡となっている.

以上をふまえて, BBmap における分岐をみていく. 周期倍化分岐が $a = 3$ で BBmap においても見ることができる. これは, 通常 $y = f^2(x)$ と $y = x$ の交点をみて, 分岐点を境に新しい 2 周期点が出現するが, BBmap においても f^1 と f^5 の

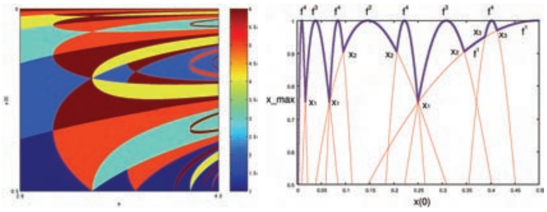

図 1: (左) 過渡過程による BBmap ($T = 7$). $2.8 < a < 4$. (右) 太線：初期値に対する時系列の最大値をとったリターンマップ（$T = 5$, $a = 4$）．細線：f^n は n 回写像のリターンマップを表している．また, x_n は n 周期解の最大値を表している．

リターンマップを考えると, 分岐点を境に, 新しい交点が 2 つ出現する．周期倍分岐と同様に接線分岐もみることができる．

3　1 次元写像における不安定周期解検出法

ここでは, 上の BBmap を応用した不安定周期解検出法を提案する．これは, BBmap における境界線である周期解を, カオス領域において検出するという方法である．まず, パラメータを固定し, 初期値に対して写像 T 回分の時系列の最大値をとったリターンマップを考える (図 1（右）の太線)．これを最大値リターンマップと呼ぶ．これは, BBmap をあるパラメータに関して縦に切ったその断面をみていることに相当する．

図 1（右）を見ても分かるように, 最大値リターンマップの尖った点 (cusp 点) は, 周期解の最大値の逆像に対応している． ここで, 各 cusp 点は周期が p 以下であるようなすべての周期解の逆像を尽くしている．よって, カオス的時系列からこの最大値リターンマップを構成し cusp 点を検出すれば, すべての不安定周期点を検出することができる． この最大値リターンマップにおける cusp 点は, 写像に依存せず周期解の最大値の逆像となり, 最大値リターンマップにおいて同様の形状をとる．よって, 写像の形が明示的に与えられていなくても, カオスアトラクタの中から不安定周期解を検出することができる．そこで, 非線形連続時間力学系の典型であるレスラー系: $\dot{x} = -y - z$, $\dot{y} = x + ay$, $\dot{z} = b + xz - cz$ にアルゴリズムを適用する． この系は 3 次元連続系であるから, 1 次元離散系に落とすために, まずポアンカレ写像を考える．このポアンカレ写像は 2 次元写像となる．さらに, この 2 次元写像の 1 変数方向のみのリターンマップをとることで, 1 次元単峰写像が得られる. しかし, この写像はその解析的な形は不明である．この得られた 1 次元写像におけるカオスアトラクタの中の周期解を最大値リターンマップによって検出する．検出された周期軌道を図 2 に示す．

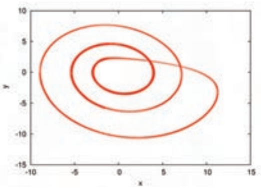

図 2: レスラー系にアルゴリズムを適用した結果. 3 周期の不安定周期軌道が検出されている．パラメータを $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5.7$ とする．

4　おわりに

本研究では, 1 次元単峰写像において, 過渡過程における最大値までの写像回数を利用して, 不安定周期解を検出する方法を提案した．この方法は, 一般的な p 時間遅れのリターンプロットをとる方法に比べて, 周期解の最大値のみを検出し, さらに, p 周期以下の周期解すべてを網羅的に検出できるという意味で優れている．さらにこの手法は, システムの詳細な数式を要しない意味で, 多様なシステムにロバストに適用できる．また, 本稿では言及しなかったが, ここでいう過渡過程では, カオスの拡散性よりも決定論性が効くために, ダイナミカルノイズに対するロバスト性が期待される．今後の課題としては, この手法の高次元系への拡張を考えている．

参考文献

[1] D. Auerbach et al.: Exploring chaotic motion through periodic orbits. Phys. Rev. Lett., vol. 58, no. 23, (1987), pp. 2387–2389.