離散・連続ハイブリッド最適化

室田一雄*　松井知己*　岩田覚*　牧野和久*　松尾宇泰*　土村展之*　土谷隆*†
*情報理工学系研究科数理情報学専攻　　†統計数理研究所

1　ジャンプシステム上のM凸関数

1.1　概要

M凸関数 [7] は，効率良く解ける非線形離散最適化問題の枠組を与えている．本研究ではM凸関数の概念を定パリティジャンプシステム上の関数に一般化し，その最小化のための最急降下型アルゴリズムを提案した (詳細は [8], [9] 参照)．これによって，Apollonio と Sebő [1] によって考察されたグラフの最小二乗因子問題に対する一般的枠組が与えられたことになる．

1.2　定義と基本的性質

V を有限集合とする．ベクトル $s \in \mathbf{Z}^V$ は，ある $u \in V$ に対し $s = \pm\chi_u$（単位ベクトル）で，$\|x-y\|_1 = \|x+s-y\|_1 + 1$ を満たすとき (x,y)-増分と呼ばれる．その全体を $\mathrm{Inc}(x,y)$ と書く．

定義 1.1 (M凸関数)**.** $J \subseteq \mathbf{Z}^V$ を定パリティジャンプシステムとする．関数 $f : J \to \mathbf{R}$ がM凸であるとは，f が次の交換公理を満たすことを言う．

(M-EXC[J])　$\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall s \in \mathrm{Inc}(x,y)$,
$\exists t \in \mathrm{Inc}(x+s,y)$
　s.t. $x+s+t \in J$, $y-s-t \in J$,
　　$f(x)+f(y) \geq f(x+s+t)+f(y-s-t)$.

定理 1.2 (最適性条件)**.** $f : J \to \mathbf{R}$ を定パリティジャンプシステム J 上のM凸関数とし，$x \in J$ とする．このとき，$f(x) \leq f(y)$ $(\forall y \in J)$ $\iff$ $f(x) \leq f(y)$ $(\forall y \in J \text{ s.t. } \|x-y\|_1 \leq 2)$.

1.3　最急降下法

定理 1.2 より次のアルゴリズムは自然である．

S0 ベクトル $x \in J$ を見出す．

S1 $f(x+s+t)$ を最小にする $s, t \in \{\pm\chi_u \mid u \in V\}$ $(s+t \neq 0)$ を見出す．

S2 $f(x) \leq f(x+s+t)$ となったら停止．このとき x が f の最小化元である．

S3 $x := x+s+t$ として S1 へ行く．

定理 1.3. f が唯一の最小化元 x^* を持つとする．このとき最急降下法の反復回数は $\|x^\circ - x^*\|_1/2$ で与えられる．ただし x° はステップ S0 で見出された初期ベクトルを表す．

最小化元が複数ある一般の場合にも，最急降下法のステップ S1 において適当なタイブレークルールを設計すると，最急降下法の反復回数を $\max\{\|x-y\|_1 \mid x, y \in J\}/2$ で抑えられる．

2　多重彩色問題とチャネル割当問題

2.1　概要

本研究では，グラフ彩色問題の拡張である 2 つの問題を扱っている．グラフ彩色問題は，有名な 4 色問題を含む，グラフ理論における基本的な問題であり，古くより研究されている．更に，本研究で扱う 2 つの問題は，携帯電話ネットワーク等の周波数割当問題という工学的背景を持っており，1970 年代より研究されているものである．しかしながら，近年の携帯電話に代表される情報機器の

劇的とも言える発達により，問題の重要性は以前とは比べものにならないほど増している．更に実務において周波数割当問題を解く場面は，地球規模のネットワークの設計や，災害時の緊急無線網の設営等，様々な状況が新たに出現している．このような時代の要請から，状況毎に異なる要求に答える，様々な性能を持つアルゴリズムを導く枠組みを構築する必要がある．

本研究では，グラフ彩色問題の拡張である多重彩色問題とチャネル割当問題に対する近似解法の枠組みを提案する．この枠組みを種々のグラフクラスに適用することにより，理論的な近似精度及び必要計算量等を得ることができる．取り扱っている 2 つの問題は，携帯電話ネットワークや災害時の緊急無線網等における基地局への周波数割り当ての際，実際に扱われる問題となっている．本研究で提案する解法に共通する特徴として，パーフェクトグラフと呼ばれる数学的に美しい構造を持つグラフクラスの特徴を積極的に用いている事が挙げられる．

携帯電話ネットワーク等における周波数割当問題に出現するグラフは，パーフェクトグラフではなく，その解法を直接適用する事は困難であるが，2 次元平面の点，特に格子点を頂点として持つという特殊性を持つ場合が多い．これに対し本研究では，格子点上に定義されるグラフをパーフェクトグラフに分解し，分割統治法の変種を適用するという解法の枠組みを提案している．この枠組みは，三角格子あるいは四角格子上に定義される様々なグラフクラス等に適用可能であり，またその際の近似比率の算定方法も与えている．

2.2 格子状グラフの多重彩色問題

論文 [4, 5] では，三角格子及び四角格子上に定義されるグラフに対する多重彩色問題に対する近似解法の枠組みを提案している．提案する解法のアイデアの根幹を成すのは，格子状グラフのパーフェクトグラフへの分解手法である．本研究では，三角格子状のグラフがパーフェクトグラフとなる必要十分条件を導き，この構造を積極的に利用して多重彩色問題を解く近似解法の枠組みを提案している．上記の必要十分条件は本研究で初めて得られたものであり，離散数学における結果としても興味深いものとなっている．

この結果は他の格子状グラフクラスについても拡張可能であり，その例として四角格子状のグラフへ適用した際の議論を行ない，同様にして近似解法が構築できることを示し，その近似精度を示している．更にこの定理を援用することで，格子状グラフ上に定義される最大安定集合問題に対する近似解法の提案も行っている．また，格子状グラフ上に定義される有理彩色問題の解法を提案し，これを用いて格子状グラフの非パーフェクト率を算定している．

一般の多重彩色問題は，NP-困難と呼ばれる，効率的な解法の存在が絶望視されている問題クラスに含まれているが，本研究では，対象とするグラフを格子状グラフに限定した場合でも，多重彩色問題が NP-困難となる事を示している．この結果より，本研究で提案する多項式時間近似解法の有用性を確認する事ができる．

2.3 チャネル割当問題

論文 [6] では，広いグラフクラスへ適用可能な，チャネル割当問題の近似解法の枠組みを提案している．提案する解法の枠組みは，パーフェクトグラフ，単位円グラフ等のグラフクラスへ適用可能である．また一般のグラフに適用した場合の近似精度についても考察を行なっている．解法は，グラフの最大クリーク問題の解を利用してグラフを分割し，分割して得られた個々のグラフに対し近似彩色法で得られた解を元にチャネルの割り当てを行なうものである．例えばパーフェクトグラフにおいては，(最大) クリーク数と (最小) 彩色数が一致することから，良い近似精度を持つ解法が構築できる．

本研究で対象としている問題は，枝重みが一定の場合のチャネル割当問題であるが，解法のアイデアは，枝重みが枝によって異なる問題へも拡張可能である．しかしながら，その場合の解法は枝

重みに強く依存したものであり，近似比率の算定は個別の議論が必要となる．本研究では，歴史的に重要なフィラデルフィア問題例について，枝重みが異なる場合のアルゴリズムを構築し，近似比率の算定を行なっている．

3　線形計画問題の符号可解性

3.1　概要

社会現象を線形方程式系で記述する際には，選好順序や係数の正負などの情報は容易に知ることができるのに対し，係数の数値化が困難である場合が多い．定性的な情報のみが与えられた状況下で線形モデルを解析するには，係数行列が要素の絶対値によらず正則（符号正則）かどうかを知る必要が生じる．この符号正則性を判定する問題の計算複雑度は長い間未解決であったが，1999 年に Robertson, Seymour, Thomas [10] によって多項式時間解法が与えられた．本研究は，このような定性的行列理論の最新の成果を最適化手法，特に線形計画法に応用することを目的としている．

3.2　結果

線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & cx \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

を $\mathrm{LP}(A, b, c)$ と書くことにする．同じ符号パタンの任意の $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ に対して，$\mathrm{LP}(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c})$ の最適解の符号パタンの集合が常に一致するとき，$\mathrm{LP}(A, b, c)$ は符号可解であるという．一般に，与えられた線形計画問題が符号可解でないことを判定するのは NP 完全である．

そこで，線形計画問題が符号可解であるための十分条件を与えるために，完全符号正則の概念を導入する．まず，正方行列において，行列式の展開式の中に非零項が存在するとき，この正方行列を項別正則という．さらに，$m \times n$ 行列の全ての項別正則な m 次小行列が符号正則であるとき，この行列は完全符号正則であるという．与えられた行列が完全符号正則かどうかの判定は，符号正則性判定のアルゴリズムを用いて，多項式時間で可能である．線形計画問題 $\mathrm{LP}(A, b, c)$ は，

$$A_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}, \qquad A_{\mathrm{d}} = \begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix}$$

が共に完全符号正則であるときに，完全符号正則であるという．完全符号正則線形計画問題に対して，最適基底解の符号パタンを効率的に見出すアルゴリズムを開発した．このアルゴリズムの計算量は，入力の非零要素数を ℓ としたときに $O(m\ell)$ である．

4　時間高精度保存・散逸スキーム

4.1　概要

保存則，あるいは散逸則を持つ微分方程式に対して，それらを離散系でも再現する数値計算法がいくつか知られているが [2]，時間方向の精度はこれまで最大でも 6 次であった [3]．本研究では，一般化後退差分公式 (GBDF) のアイデアを援用することで，任意の高次保存・散逸解法を構築する方法を提案した．

4.2　対象とする問題

次の常微分方程式系を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z}(t) = A\nabla H(\boldsymbol{z}), \quad t > 0, \\ \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0, \end{cases}$$

ただし $\boldsymbol{z} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$，$A$ は $N \times N$ の実数値行列，$H : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$，および $\boldsymbol{z}_0 \in \mathbf{R}^N$ は与えられた初期値ベクトルである．行列 A が歪対称のとき，H は解に沿って保存される：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\boldsymbol{z}(t)) = (\nabla H)^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{z}} = (\nabla H)^{\mathrm{T}} A\nabla H = 0.$$

また負定値のとき，散逸される：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(\boldsymbol{z}(t)) = (\nabla H)^{\mathrm{T}} A\nabla H \leq 0.$$

4.3 高次保存・散逸スキーム

時間方向の離散化点数を N_t とする．

スキーム 1 (一般化 p 次スキーム)**.** $\delta^{\langle 1\rangle,p}_{m;\boldsymbol{c}_m}$ を p 次差分作用素 ($\nu, l_1, \boldsymbol{c}_m$ をその付随パラメータ)，$\nabla^p_{\mathrm{d};\boldsymbol{c}_m}$ をその作用素に対する p 次離散勾配とする．このとき，スキーム

$$
\begin{cases}
\delta^{\langle 1\rangle,p}_{m;\boldsymbol{c}_m}\boldsymbol{z}^{(m)} = A\nabla^p_{\mathrm{d};\boldsymbol{c}_m}H(\boldsymbol{z}^{(0)},\ldots,\boldsymbol{z}^{(p)}) \\
\qquad\qquad (m = 1,\ldots,\nu-1), \\
\delta^{\langle 1\rangle,p}_{m;\boldsymbol{c}_m}\boldsymbol{z}^{(m)} = A\nabla^p_{\mathrm{d};\boldsymbol{c}_m}H(\boldsymbol{z}^{(m-\nu)},\ldots,\boldsymbol{z}^{(m+p-\nu)}) \\
\qquad\qquad (m = \nu,\ldots,N_t-1), \\
\delta^{\langle 1\rangle,p}_{m;\boldsymbol{c}_m}\boldsymbol{z}^{(m)} = \\
\qquad A\nabla^p_{\mathrm{d};\boldsymbol{c}_m}H(\boldsymbol{z}^{(N_t-\nu-1)},\ldots,\boldsymbol{z}^{(N_t+p-\nu-1)}) \\
\qquad\qquad (m = N_t,\ldots,N_t+p-\nu-1), \\
\boldsymbol{z}^{(0)} = \boldsymbol{z}(0)(\text{初期値}),
\end{cases}
$$

は，A が歪対称な場合次の意味で保存的：

$$\delta^{\langle 1\rangle,p}_{m;\boldsymbol{c}_m}H^{(m)} = 0 \quad (m = l_1, l_1+1,\ldots),$$

あるいは負定値の場合，散逸的：

$$\delta^{\langle 1\rangle,p}_{m;\boldsymbol{c}_m}H^{(m)} \leq 0 \quad (m = l_1, l_1+1,\ldots)$$

である．さらに，このスキームは p 次精度である．

このスキームでは非常に大きな非線形方程式を解かねばならないが，小さいブロックに分割して逐次計算するアルゴリズムも別途提案した．

参考文献

[1] N. Apollonio and A. Sebő: Minsquare factors and maxfix covers of graphs, Lecture Notes in Computer Science, 3064, Springer-Verlag, 2004, pp. 388–400.

[2] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner: *Geometric Numerical Integration*, Springer-Verlag, 2002.

[3] T. Matsuo: High-order schemes for conservative or dissipative systems, *J. Comput. Appl. Phys.*, 152 (2003), pp. 305–317.

[4] Y. Miyamoto and T. Matsui: Multicoloring unit disk graphs on triangular lattice points, *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2005, pp. 895–896

[5] Y. Miyamoto and T. Matsui: Perfectness and imperfectness of the kth power of lattice graphs, Lecture Notes in Computer Science 3521, Springer-Verlag, 2005, pp. 233–242.

[6] Y. Miyamoto and T. Matsui: Approximation algorithms for minimum span channel assignment problems, METR 2005-28, September 2005.

[7] K. Murota: *Discrete Convex Analysis*, SIAM, 2003.

[8] K. Murota: M-convex functions on jump systems: A general framework for minsquare graph factor problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, to appear.

[9] K. Murota and K. Tanaka: A steepest descent algorithm for M-convex functions on jump systems, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, to appear.

[10] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas: Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits, *Annals of Mathematics*, 150 (1999), pp. 929–975.