

# 超ロバスト幾何計算

杉原厚吉 西田徹志 谷口隆晴 松浦史郎

情報理工学系研究科数理情報学専攻

## 1 はじめに

形と動きに関する情報処理のための幾何アルゴリズムは、一般に数値誤差に対して脆弱である。なぜなら、数値計算の誤差によって、位相構造の判定を誤るなどすると、実際の世界ではあり得ない状況に陥り、アルゴリズムが破綻してしまうからである。私たちの研究グループは、この困難を克服するために、ロバストなソフトウェアの設計法を開発してきている。本年度の研究成果は、以下に示すとおりである。

## 2 円ボロノイ図の算法と応用

円に対するユークリッド距離ボロノイ図は、領域の境界線が曲線となるため、点ボロノイ図と比べて安定に構成することは格段に難しい。本年度は、この円ボロノイ図の構成算法とその応用について、多面的に研究した。

まず第一に、円のボロノイ図を、円の中心点のボロノイ図から出発して接続関係を変更していくことによって構成するアルゴリズムを構成した [1]。すなわち、まず円の中心点に対する点ボロノイ図を作る。次に、それらの中心点を、半径をもった円に置き換えながら、それに対応するボロノイ領域の境界を修正していく。この修正は、双対図形の世界では、四角形の対角線をもう一つの対角線に置き換える純粋に組合せ位相的操作であるため、数値誤差による破綻の心配のない手続きとして構成できた。

これとは別に、厳密計算法の考え方を直接適用して円ボロノイ図を構成する算法についても検討を加えた [8]。3個の円のボロノイ図から出発して、

円を一つずつ添加しながら、対応するボロノイ図を更新する逐次添加法において、位相構造を誤らないために必要な計算精度を調べた。その結果、三つの円が共通外接円と共通内接円を一つずつ持つ位置関係にあるとき、対応するボロノイ点が、新しく添加された円の領域に入るか否かを、入力データの8倍精度で判定する方法を構成できた。

一方、3個の円が二つの共通外接円をもつ場合に対しては、スツルム列を用いた判定法は構成できたが、必要な精度が膨大で、そのままでは実用にならないこともわかった。したがって、この場合に対する厳密計算法のアルゴリズムは未解決のまま残されている。

デジタル位相優先法による円ボロノイ図構成算法についてもアルゴリズムを作った。すなわち、まず与えられた円のボロノイ図の近似図形をデジタル画像の形で構成し、次に、そのデジタル画像近似から位相構造を抽出し、最後に、この位相構造を使って位相優先法を実行するというアルゴリズムである。

この方法では、デジタル画像による近似は、位相構造が整合のとれた形で得られる範囲でできるだけ粗い解像度を用いるのがよい。そのための解像度の限界を、与えられた円の最小半径と、異なる円の最小距離によって特徴づけることができた。またこの方法で作ったソフトウェアの有効性を、円のパッキング問題へ適用することによって確認できた [7]。

さらにこの考え方を3次元へ拡張して、球のボロノイ図の構成算法も作ることができた。球ボロノイ図は、領域の境界が頂点をもたないことがあるなど、2次元にはない難しさをもつが、3次元デジタル画像近似を利用することによって安定

に計算できる見通しを立てることができた [3].

さらに、円ポロノイ図の頂点位置を求める方法について、アポロニウスの第 10 問題と関連させて基礎的性質を調べた [2]. その結果、各種の円の配置に対するポロノイ頂点の統一的な計算法を構成することができた.

### 3 流れの中での最短路探索のための新粒子法

流れの中の最短到達時間問題とは、流れを伴う領域に始点の集合と終点の集合が与えられとき、ボートが始点の集合から終点の集合まで動くのにかかる最短時間を求める問題のことである. 我々はその最短時間をボート航行距離と呼ぶ. この問題を最適制御に帰着すると、最善の操縦方法は、ボートを常に等距離曲線の法線方向へ進めるということがわかる. もちろん、解析解を得ることは難しいので、数値計算に頼ることになるが、その典型的な方法は、マーカー粒子法と呼ばれる類のものである. 等距離曲線をマーカーと呼ぶ粒子で近似し、ある時間幅で各粒子の次の位置を計算し、再び等距離曲線を構築する. これを繰り返しながら計算を進めて行く方法である. このとき、各粒子の法線方向は、近傍の粒子を使って決定される.

しかしながら、我々の問題の難しさは、初期条件として滑らかな曲線を与えたとしても、等距離曲線は滑らかさを失うことにある. それは、ある場所では、最短時間を達成する経路が複数存在することに起因する. このとき、等距離曲線を用いて法線を決める方法、すなわち近傍に依存する方法では、破綻を起こしてしまう.

今回、我々は、近傍に依存することなく法線方向を決定し、この破綻を回避する安定な数値計算法を考案した [6]. 以下その方法を説明する.

$E(t)$  を時刻  $t$  での等距離曲線とし、図 1 のように、 $E(t)$  は  $s \in S \subset \mathbf{R}$  により滑らかにパラメータ化されているとする. ただし、 $t = 0$  のとき弧長になるように取る.  $F$  は正の定数、 $f(x, y) = (g(x, y), h(x, y))^T$  を滑らかな流れベクトルとす

る. このとき、 $p(s, t) = (x(s, t), y(s, t))^T \in E(t)$  を、固定した  $s$  に対して、

$$E(t) = \{p(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s \in S\}, \quad |p_s(s, t)| \neq 0, \\ p_t(s, t) = Fn(s, t) + f(p(s, t))$$

を満たす、すなわち、最短時間を達成する経路を動く粒子の位置とする. ただし、 $p_s(s, t)$  は  $s$  による微分を表し、 $p(s, t)$  で  $E(t)$  に接するベクトルである. そして、 $p_t(s, t)$  は  $t$  による微分を表し、 $n(p)$  は  $p \in E(t)$  での  $E(t)$  の単位法線ベクトルを表す. また、ベクトル  $\tau$  を

$$\tau(s, t) \equiv a(s, t)p_s(s, t), \quad a(s, t) = 1/|p_s(s, t)|$$

と定義する. これは点  $p$  での単位接ベクトルで、 $n$  に直交し、図 1 のように、 $n(s, t)$  を反時計回りに 90 度回転させたものである.

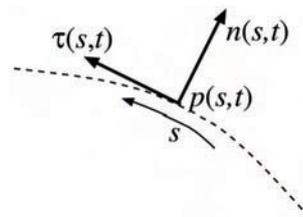


図 1: 位置  $p$  での接ベクトルと法線ベクトルの関係

法線ベクトル  $n(s, t)$  が  $t$  に対してどのように変化するかを導出する. 以下では、それぞれの変数は省略する.

$p_t$  の  $s$  による微分は、

$$p_{ts} = Fn_s + f_s = F\kappa p_s + (\nabla^T f)p_s$$

となる. ただし、 $\kappa$  は  $p$  での曲率を表し、

$$\nabla^T f = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}.$$

また、 $a$  が、固定した  $s$  に対して、初期値問題

$$a_t + \{F\kappa + ((\nabla^T f)\tau) \cdot \tau\}a = 0, \quad a(s, 0) = 1$$

の解であることに注意すると、 $\tau$  の  $t$  による微分は、

$$\tau_t = ap_{st} + a_t p_s = (I - \tau\tau^T)(\nabla^T f)\tau$$

となる。ゆえに、 $n$  は  $\tau$  を時計回りに 90 度回転させたものであったので、

$$n_t = (I - nn^T) (\nabla^T f)^T n$$

を得る。この微分方程式から得られる法線ベクトルは、長さ 1 を保存し続けることを注意しておく。

以上より、近傍に依存しない新たな方程式系

$$\begin{aligned} p_t(s, t) &= Fn(s, t) + f(p(s, t)), \\ n_t(s, t) &= (I - n(s, t)n^T(s, t)) (\nabla^T f)^T n(s, t) \end{aligned}$$

を構成することができる。つまり、それぞれの粒子を独立に計算することができるのである。

また、この問題に対する有限要素法的な解法も開発しているが、それについては、体系化の作業を行なうことができた [4, 5]。

今後は、高次元および曲面への拡張を行なっていきたい。

## 4 波動シミュレーションにおける境界条件の取り扱い

**これまでの研究と本年度の成果の概要** 昨年度は、Navier-Stokes 方程式に対する新たな無反射境界条件の構築を行った。これは、波の伝搬方向に仮定を置いていた従来の方法とは異なり、どのような方向から波が伝搬して来ても破綻しないという波の向きに対するロバスト性や、境界の形や位置に依存しない汎用性のあるプログラムコードを書くことが可能であるために実装時のミスが発生しにくいという、人的ミスに対するロバスト性を持つ。本年度は、これに関連して次のような研究を行った：

- 十分滑らかな解に対する無反射境界条件の有効性の検証、
- 不適切な問題に対する数値解の特徴づけ。

**十分滑らかな解に対する無反射境界条件の有効性** [9, 11] 昨年度に提案した無反射境界条件は Hedstrom の特性曲線法に基づく無反射境界条件

の拡張となっている。Hedstrom の無反射境界条件では、特性曲線法を用いるために解が単純波であるという仮定が置かれており、我々が提案した手法においてもこの仮定は不可欠なものであった。一方、現実のシミュレーションにおいては必ずしもこの仮定は満たされるとは限らないが、1次元の流れに対しては多くの場合、反射波が発生しないということも経験的に知られていた。本研究 [11] では、この理由、すなわち、なぜ多くの場合に反射波の発生を防ぐことができているのかを考察した。その結果、1次元の流れに対して特性曲線法に基づく無反射境界条件を設定した場合には、解が単純波でない場合にも解が十分滑らかであれば反射は起きないことが明らかとなった。

**不適切な問題に対する数値解の特徴づけ** [10] 一般に、無反射境界条件は、解の一意存在性が失われてしまった不適切な問題を導くことが多い。これは、無反射境界条件は物理的な境界条件ではないため、無限遠での圧力や温度などといった現象を特徴づけるための情報が不足してしまうことによる。しかしながら、実際のシミュレーションでは、不適切であると予想される問題に対しても数値計算は行われることも多く、そのような場合にも、一見、それらしく物理現象を再現する「解らしき数値解」が「唯一つ」得られる。このとき得られた「解らしき唯一解」は、離散化によって得られた「見掛け上の唯一解」であり、離散化手法に依存して決まるものと思われる。そのため、シミュレーションの信頼性を保証するためには、離散化手法と得られた数値解の対応関係を明らかにする必要がある。本研究では「解らしき数値解」と離散化手法との関係を、次のような1次元波動方程式に対する数値解について考察した：

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= 0 \quad \text{for } x > 0, \\ w_{tt} - w_{xx} &= 0 \quad \text{for } x = 0. \end{aligned}$$

この問題は境界条件に波動方程式自身を設定しているため、実質的な境界条件は何も課されていない。そのため、無限個の解が存在する。しかしながら、この境界条件は片側差分を利用して離散化

することができる。実際、例えば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta t)^2} \left( w_0^{(n+1)} - 2w_0^{(n)} + w_0^{(n-1)} \right) \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left( w_2^{(n)} - 2w_1^{(n)} + w_0^{(n)} \right) \end{aligned}$$

のようにすれば良い。このように離散化した場合、数値解は初期条件が与えられれば一意的に計算することができる、「解らしき数値解」が「唯一つ」得られる。本研究 [10] では、この「解らしき唯一の数値解」と片側差分の選び方の関係について考察した。その結果、離散化によって意図しなかった境界条件が課されており、その境界条件が解の一意性を保証しているということが判明した。また、この意図していない境界条件は、離散化に利用した片側差分の精度に依存して決まるということも明らかとなった。このことは次のことを示唆する：

- 偏微分方程式の数値計算においては離散化手法に依存した、意図していない境界条件が課される可能性がある、
- 意図しない境界条件と本来の境界条件の矛盾というこれまで認識されていなかった脆弱性を生む可能性がある。

この新たに認識された脆弱性についての考察が今後の課題である。

## 参考文献

- [1] D. Kim, D.-S. Kim and K. Sugihara: Euclidean Voronoi Diagram for Circles in a Circle. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, Vol. 15, No. 2 (2005), pp. 209–228.
- [2] D. Kim, D.-S. Kim and K. Sugihara: Apollonius Tenth Problem via Radius Adjustment and Möbius Transformation. *Computer-Aided Design*, Vol. 38 (2006), pp. 14–21.
- [3] S. Matuura and K. Sugihara: Robust Construction of Sphere Voronoi Diagrams Using Digital Topology. *Proceedings of the 2nd International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, Seoul, Korea, October 10–13, 2005, pp. 125–133.
- [4] T. Nishida and K. Sugihara: Boat-Sail Voronoi Diagram and Its Computation Based on a Cone-Approximation Scheme. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 3 (2005), pp. 367–383.
- [5] T. Nishida and K. Sugihara: Boat-Sail Voronoi Diagram on a Curved Surface. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 2 (2005), pp. 267–278.
- [6] T. Nishida, K. Sugihara and M. Kimura: Stable Marker-Particle Method for the Voronoi Diagram in a Flow Field, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, accepted.
- [7] K. Sugihara and S. Matuura: Fast and Robust Disk Packing Based on Digital Topology. *2nd Meeting of Euro Special Interest Group on Cutting and Packing*, Southampton, UK, April 14–16, 2005.
- [8] Y. Tanaka and K. Sugihara: Exact Computation of a Circle Voronoi Diagram. *Proceedings of the 2nd International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, Seoul, Korea, October 10–13, 2005, pp. 173–183.
- [9] 谷口隆晴, 杉原厚吉: 空間多次元 Navier-Stokes 方程式に対する無反射境界条件. *ながれ*, Vol. 24, No. 1 (2005), pp. 81–91.
- [10] 谷口隆晴, 杉原厚吉, 杉原正顯: 波動方程式の非適切問題に対する数値解の見かけの一意性について. 第 34 回数値解析シンポジウム講演予稿集, 浜松, 2005/6/28–30, pp. 17–21.
- [11] 谷口隆晴, 杉原厚吉: 滑らかな解に対する Hedstrom の無反射境界条件. 第 19 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, C7-4, 渋谷, 2005/12/13–15.