Navier-Stokes 方程式に対する超ロバスト無反射境界条件

RA 谷口隆晴
情報理工学系研究科数理情報学専攻

1 概要

広大な現実の空間に比べ計算機の中で扱うことのできる領域は高々有限であるため，波のシミュレーションの際には計算対象となる空間の打ち切りが必要となる．このとき，打ち切られた断面という人工的な境界が生じてしまうが，そのような人工的な境界上では特別な取り扱いをしない限り，現実には存在しない反射波が生成されてしまい，内部の計算に悪影響を及ぼしてしまう．そこで，境界上で反射波をなくすような境界条件，無反射境界条件の設定が重要となる．

無反射境界条件は既にいくつか提案されているが，Poinsot-Lele の境界条件[1]は最もよく利用されている手法のひとつである．しかし，Poinsot-Lele の境界条件の基礎となった Thompson の境界条件において性能の保証が得られるのは波が境界に対して垂直に入射した場合だけである．そのため，その拡張である Poinsot-Lele の境界条件は本質的に 1 次元的な手法であるという問題点を抱えており，この問題点の解決が求められていた．

本研究では解が単純波である，という仮定をおき，数理工学的考察と数値データを組み合わせることによって，流れの多様性，人的ミス，実装時の離散化等に対してロバストな超ロバスト無反射境界条件を提案した．

2 既存の手法とその問題点

Poinsot-Lele の境界条件は Thompson の非粘性流体方程式，Euler 方程式に対する境界条件と Dutt により提案された粘性項の取り扱いを組み合わせたものである．しかし，Thompson の手法は，波が境界に対して垂直に入射する場合にしか，その性能保障がなされていない．まず，この点について述べる．

Thompson の境界条件は Hedstrom によって提案された空間 1 次元の場合の無反射境界条件に基づく．Hedstrom の境界条件のアイディアは流束分離という手法である．これは，解が単純波である場合に，係数行列の対角化によって波を速度ごとに分離，抽出する方法である．Hedstrom の手法では，これを利用して計算領域内部に進行する波をなくすように境界条件を設定する．また，我々は，流束分離法は空間 1 次元の場合には解が単純でなくても十分滑らかであれば有効であることを示した[3].

Thompson は多次元方程式においても同様に，係数行列の対角化によって波を分離できる，と考え Hedstrom の境界条件を空間多次元の方程式に拡張した．しかし，空間多次元の方程式では，係数行列の対角化によって流束分離が行えるのは，境界に対して垂直な流れの場合のみである．つまり，Thompson の境界条件には反射が抑えられると保障されているのは流れが境界に対して垂直という場合のみという問題点があった．

3 Navier-Stokes 方程式に対する超ロバスト無反射境界条件

この節では，我々の提案した空間多次元の粘性圧縮流体方程式，Navier-Stokes 方程式に対する無反射境界条件[2]について述べる．本手法は Hedstrom の無反射境界条件を Thompson とは別の考え方で多次元に拡張し，Dutt の手法と組み合わせたものである．基本的には，流束分離法を空間多次元に拡張したものである．

単純波を仮定すると Euler 方程式はある単独 1 階完全非線型方程式に帰着できる．一般に，単独 1 階偏微分方程式は特性曲線と呼ばれる時空間上のある曲線上で常微分方程式に帰着させることができる．このことは特性曲線上では情報が完全に閉じている，すなわち，特性曲線が波の伝搬経路を表している，ということを意味する．そのた

め，特性曲線を求めることによって波の進行方向を決定できる．

Euler 方程式に対し単純波を仮定して得られた単独１階方程式についてその特性曲線を求めると，その延び方は波の，自明には取り出せない状態に依存する．しかし，我々は，数値計算時に所持している偏微分係数などの様々なデータと数理工学的考察を組み合わせることにより，特性曲線の延び方，すなわち，波の伝播方向の推定法とそれを利用した無反射境界条件を提案し，Poinsot らと同様に Dutt の手法と組み合わせることで Navier-Stokes 方程式に対する手法へ拡張した．

4 提案手法の超ロバスト性

我々の提案した手法は「様々に変化し得る流れの向きに対しロバスト」であると同時に，境界条件の与え方が境界の位置ではなく流れの状況に依存する手法であるため「角を含む境界上の全ての点で，プログラムコードのほとんどの部分が共有可能」という特徴を持つ．そのため，境界の位置によってプログラムコードを変えなくてはならない従来の手法に比べて実装及びデバッグをはるかに効率良く行うことができ，本手法を用いることで人的ミスの防止が容易となる．すなわち，本手法は「人的ミスに対するロバスト性」をも重ね備えている．さらに，詳細は文献[2]に譲るが，我々は本手法に対する CFL 条件やゼロ除算に対してロバストな実装法も提案している．以上のように本手法は

- 流れの多様性
- 人的ミス
- 実装時の離散化

等といった多数の外乱に対してロバストな超ロバスト無反射境界条件である．

5 数値実験結果

領域左側から亜音速，常温の空気による噴流を流した場合の音波を計算した．支配方程式は 2 次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式であり，計算には，空間方向差分法に 6 次精度コンパクトスキーム，時間積分法に 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いた．また，コンパクトスキームを安定化するために Lele の空間フィルタを利用した．これらの手法は，音波の数値計算では一般的な手法である．

上記の条件下で今回提案した境界条件と Poinsot-Lele の境界条件を設定した場合についてシミュレーションを行い，その結果を比較した．得られた質量密度分布を，Poinsot-Lele の境界条件を用いた場合の結果を図 1 に，提案した境界条件を用いた場合を図 2 に示す．

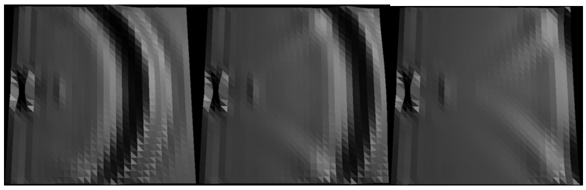

図 1. Poinsot−Lele の境界条件

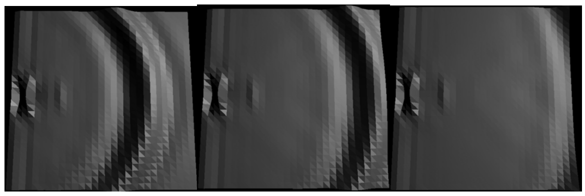

図 2. 超ロバスト無反射境界条件

計算結果を比較すると，Poinsot-Lele の境界条件を用いた場合には，波が垂直に入射していない上下の境界上で反射波が見られるのに対し，今回提案した手法では，わずかな反射はみられるものの大幅な改善が確認できる．

6 結論

空間多次元 Navier-Stokes 方程式に対し，流れの多様性，人的ミス，実装時の離散化等に対するロバスト性を重ね備えた超ロバスト無反射境界条件を提案した．本手法は，方程式だけからでは波の進む向きが決められない，という問題を，数値計算時に保持しているデータを利用する，という方法で解決したものである．また，数値実験上も性能の改善を裏付ける結果が得られた．

しかし，流体の数値計算においては乱流や衝撃波をはじめとする様々な極限的状況が存在する．今後はこれらの極限状況においても効果を発揮する，さらにロバストな境界条件の構築に取り組む．

引用文献

[1] T. J. Poinsot and S. K. Lele: Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Reacting Flows, *Journal of Computational Physics*, vol. 101, pp. 104-129, 1992.

[2] T. Yaguchi and K. Sugihara: A New Characteristic Nonreflecting Boundary Condition for the Multidimensional Navier-Stokes Equations, *AIAA-Paper*, AIAA-2005-2868, 2005.

[3] T. Yaguchi and K. Sugihara: An Extension of Hedstrom's Boundary Condition to Non Simple Solutions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, submitted.