

動的安定メモリの構築へ向けて

RA 安東弘泰

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概要

1次元離散時間力学系において単峰写像の性質を利用した超安定周期解探索アルゴリズムを提案する。これは、パラメータを変数として扱うことで、カオス解を超安定周期解に収束させるアルゴリズムである。ここで、アルゴリズムを動的な状態維持システムとしてとらえ、超安定周期解を情報記憶媒体とみなすことで、ノイズにロバストな動的安定メモリの実現の可能性を考察する。

1 はじめに

非線形力学系にみられる代表的な現象としてカオスがあげられる。具体的には、系に与える初期値に対する鋭敏な依存性やそれに伴う長期予測不可能性である。これは、初期値に誤差があった場合、非線形性のためその誤差が時間とともに指数関数的に広がっていくということである。さらに、初期値を無限の精度で与えることはできないので、長期予測も不可能となる。このように、カオスの振る舞いは複雑であるが、その裏に決定論的法則性を持っていることから、フラクタル等の数理的に興味深い振る舞いが観測され、それらの性質を応用した研究が数多く存在する [1]。

以上のようなカオスの性質を理解するために、もっとも単純な対象として1次元単峰写像がよく研究されている [2]。ここで、1パラメータの1次元単峰写像を考えたとき、そのパラメータは大きく分けて周期解領域とカオス解領域に2分できる。さらに、カオス解を与えるパラメータ領域の中には可算無限個の周期解の窓と呼ばれる安定周期解

を与えるパラメータ領域が散在しすることが知られている。

Melbyらは、カオスパラメータ領域から周期解の窓を探索するシステムを考案した [3]。具体的には、変数の一定区間ごとの時系列にローパスフィルタをかけてフィードバックさせ、パラメータを調節するというものである。彼らは、カオスが生体システムにおいて数多く観測されていることから、不規則性から規則性への自己調節という意味で、この仕組みを生物の適応性として考察した。

本報告では、Melbyらの研究を参考にして、離散力学系において単峰写像の性質を利用した超安定周期解探索アルゴリズムを提案する。これは、パラメータを変数として扱うことで、カオス解を与えるパラメータを周期解の窓における超安定周期解を与える値に収束させるものである。ここで超安定とは、安定性が非常に強いということである。このモデルは、Melbyらのモデルとは異なり、写像が明示的に分かっている場合であれば、シンプルなパラメータ変化則により、ほぼすべての初期条件に対して超安定周期解に収束させることができる。さらに、パラメータの収束値が超安定周期解を与える値であることと、アルゴリズムが動的にパラメータを維持することを有効に利用することで、ノイズにロバストな動的安定メモリの実現の可能性を考察する。

2 超安定周期解探索アルゴリズム

1次元離散時間力学系の典型例としてロジスティック写像 $x(t+1) = ax(t)(1-x(t))$ を考える。ここで、 a はコントロールパラメータである。本アル

ゴリズムでは、このパラメータを変数のフィードバックで変化させる。具体的には、ある一定区間の x の時系列の最大値を次の写像関数の極大値になるようにパラメータを更新する。ロジスティック写像の場合、最大値の 4 倍を次のパラメータとすることがこれに対応する。このアルゴリズムの本質は、分岐図において、パラメータに対する極大値の軌跡を基準線として、各時系列での最大値とのリターンマップのようなものを考えることにある。この考察から、パラメータの収束点はその解の中に極大値を含む周期解を与える値となることが予想される。この周期解は超安定周期解として知られる。超安定周期解は周期解の窓における各周期解に存在している。ここで、この収束点近傍においては、アルゴリズムの収束性は証明できる。一方、周期解の窓はカオス解を与えるパラメータ領域の中に無数に存在し、その場所は決定的である。しかしながら、アルゴリズムの性質上、カオス領域をパラメータが変化していく際に、カオスの軌道不安定性の影響を受けるため、どの窓に収束していくかを解析的に扱うのは困難である。そこで数値実験を行った結果、最大値を観測する時系列の長さ n 、 x, a の初期条件に依存するが、すべての初期条件に関して超安定周期解に収束することが示された。

3 アルゴリズムのノイズ耐性

アルゴリズムをロジスティック写像に適用した場合に関して、変数に加法的ノイズを与えたときの振る舞いを数値的に調べた。耐えうるノイズの振幅は、収束する解の存在する窓の幅に依存する。つまり、ノイズの振幅が大きくなると、幅の広い窓にのみ収束する。また、最大値を観測する時系列の長さを短くすることで、幅の広い窓に収束させることができる。よって、系をノイズに強くするためには、観測時間を短くすれば良い。ただし、収束できる周期解の数は限定的になる。実際、観測時間 20 ステップに対して、 10^{-4} の振幅のノイズまで、軌道を超安定周期解周辺にとどめることができた。

4 動的超安定メモリ

超安定周期解探索アルゴリズムは、ノイズ存在下でも初期パラメータをカオス解に対応する値から始めることで、カオス軌道を超安定周期軌道を与える値近傍に収束させることができる。実際、ロジスティック写像にアルゴリズムを適用した際に、振幅 10^{-5} 程度のノイズを与えた系に関して、収束しうる解の数は 8 から 10 である。そこで、ロジスティック写像を、アルゴリズムによって動的に周期軌道を維持する 1 つの素子として考える。これにより、1 素子でいくつかの超安定状態を維持でき、ある程度ノイズにロバストな動的安定メモリを実現できる可能性が生まれる。

5 おわりに

本報告では、1 次元離散時間力学系において単峰写像の性質を利用した超安定周期解探索アルゴリズムを提案した。また、系に加法的ノイズが与えられた場合に関して、系のノイズ耐性を調べた。そこで、アルゴリズムを動的な状態維持システムとしてとらえ、超安定周期解を情報記憶媒体とみなすことにより、アルゴリズムを、ノイズにある程度ロバストな動的安定メモリへ応用できる可能性を示唆した。

参考文献

- [1] E. Ott: Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1980.
- [2] P. Collet, and J. Eckmann: Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhauser, Cambridge, 1980.
- [3] P. Melby *et al.*: Adaptation to the Edge of Chaos in the Self-Adjusting Logistic Map. *Physical Review Letters*, Vol. 84, No. 26, (2000), pp. 5991–5993.