物理・情報デュアル制御

原 辰次 *，津村 幸治 *，大石 泰章 †

*：情報理工学系研究科 システム情報学専攻

†：情報理工学系研究科 数理情報学専攻

1　有限周波数特性に基づく動的システムの設計

原 辰次（システム情報学専攻）

1.1　概要

KYP (Kalman–Yakubovič–Popov) 補題は，最適制御，ロバスト制御，適応制御などシステム制御理論の展開において非常に大きな役割を果たしてきた．本研究では，KYP 補題を一般化し，線形時不変系に対する有限周波数特性を統一した形式 (線形行列不等式) で特徴付けた．また，それに基づいた新しい動的システムの設計法を提案し，設計支援パッケージを MATLAB 上に構築した．なお，本研究はヴァージニア大学の岩崎徹也助教授との共同研究である．

1.2　一般化 KYP 補題

動的システムの設計は，注目する特定周波数帯域毎の周波数特性の整形という形で捉えることができる．それを可能な限り保守性を少なくかつ効率良く行うための基礎理論として，文献 [1] の結果を連続時間系・離散時間系，低周波数 (LF)・中間周波数 (MF)・高周波数 (HF) 帯域のいづれにも対応できる統一的な形に一般化した [2].

まず，周波数変数を表す複素数のクラスを

$$\mathbf{\Lambda} := \{\ \lambda \in \mathbb{C} \mid \sigma(\lambda,\Phi) = 0,\ \sigma(\lambda,\Psi) \geq 0\ \} \quad (1)$$

で表す．ただし，$\sigma(\cdot,\cdot)$ は，$G \in \mathbb{C}^{n\times m}$($n\times m$ 複素行列) と $\Pi \in \mathbf{H}_{n+m}$(($n+m$) 次エルミート行列) に対して，以下のように定義する．

$$\sigma(G,\Pi) := \begin{bmatrix} G^* & I_m \end{bmatrix}^* \Pi \begin{bmatrix} G \\ I_m \end{bmatrix}$$

例えば，連続／離散時間系の周波数変数

$$\mathbf{\Lambda}_c = \{\ j\omega \mid \omega \in \mathbf{\Omega}\ \},\quad \mathbf{\Lambda}_d = \{\ e^{j\theta} \mid \theta \in \mathbf{\Theta}\ \}$$

は，Φ をそれぞれ

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \Phi_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と定め，Ψ を以下のように選定すればよい．

連続時間	$\mathbf{\Omega}$	Ψ
LF	$\lvert\omega\rvert \leq \varpi_\ell$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \varpi_\ell^2 \end{bmatrix}$
HF	$\lvert\omega\rvert \geq \varpi_h$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varpi_h^2 \end{bmatrix}$
MF	$\varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2$	$\begin{bmatrix} -1 & j\varpi_c \\ -j\varpi_c & -\varpi_1\varpi_2 \end{bmatrix}$

ただし，$\varpi_c := (\varpi_1 + \varpi_2)/2$.

離散時間	$\mathbf{\Theta}$	Ψ
LF	$\lvert\theta\rvert \leq \vartheta_\ell$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\cos\vartheta_\ell \end{bmatrix}$
HF	$\vartheta_h \leq \lvert\theta\rvert \leq \pi$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2\cos\vartheta_h \end{bmatrix}$
MF	$\vartheta_1 \leq \theta \leq \vartheta_2$	$\begin{bmatrix} 0 & e^{j\vartheta_c} \\ e^{-j\vartheta_c} & -2\cos\vartheta \end{bmatrix}$

ただし，$\vartheta_c := (\vartheta_1 + \vartheta_2)/2$, $\vartheta := (\vartheta_2 - \vartheta_1)/2$.

このとき，以下の定理が成り立つ [2].

定理 (一般化 KYP 補題)：

行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\Theta \in \mathbf{H}_{n+m}$, $\Phi, \Psi \in \mathbf{H}$ と (1) で定義される $\mathbf{\Lambda}$ が与えられ, $\det(\lambda I - A) \neq 0, {}^\forall\lambda \in \mathbf{\Lambda}$ が成立しているとする．このとき，すべての $\lambda \in \mathbf{\Lambda}$ に対して, $\sigma((\lambda I - A)^{-1}B, \Theta) < 0$ が成立するするための必要十分条件は，以下の行列不等式を満たす $P, Q > 0 \in \mathbf{H}_n$ が存在することである．

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0$$

ここで，$\otimes$ は行列のクロネッカ積を表す．

上記の結果は，デスクリプタ表現されたシステムや多項式表現されたシステムに対しても拡張されている [2]．

1.3 一般化 KYP 補題に基づく動的システムの統一的設計法

導出した一般化 KYP 補題は，これまでの結果をその特別の場合として含む一般的な結果であり，周波数帯域毎の特性の整形が重要となる動的システムの設計の新しい基本ツールとなり得るものである．実際，設計すべき伝達関数の極が固定されている場合 (PID 制御器設計や FIR フィルタ設計など) は，凸最適化問題の一種である半正定値計画問題に帰着することができ，保守性のまったくない設計が可能である [2]．また，FI 問題やあるクラスの SF 問題に対しても凸最適化問題に変形可能であることを示した [3]．

さらに，各周波数帯域毎の周波数特性の設計仕様を与えると，対応する線形行列不等式条件を自動的に生成するプログラムを MATLAB 上で開発し，これに基づいた動的システムの設計支援システムを構築した．現在，非凸最適化問題に対する繰り返し最適化アルゴリズムに関して検討中である．

2 ハイブリッド凸最適化問題

原 辰次（システム情報学専攻）

2.1 概要

工学の実際の設計問題において，変数が連続値と離散値の両方をとるような，ハイブリッド最適化問題が多く見られる．しかしこれまでは，連続あるいは離散のどちらかに限定した最適化問題だけが主に研究されてきた．本研究では，このような実問題に対応するために，ハイブリッド凸関数をまず定義し，その凸性の仮定の下での最適性条件を求めた．

2.2 問題設定

制約条件なしのハイブリッド最適化の一般的な問題を以下のように設定する．

問題（ハイブリッド凸最適化）：

$$\min_{x,y} \quad f(x,y)\ , \quad \text{s.t.} \quad x \in \mathbf{Z}^n, y \in \mathbf{R}^m$$

ただし，f は以下で定義されるハイブリッド $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数あるいはハイブリッド $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数とする．

定義 (ハイブリッド $\mathrm{M}^\natural$/$\mathrm{L}^\natural$ 凸関数)：

関数 $f : \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ が条件

$$\forall x \in \mathbf{Z}^n,\ \ \nabla_y^2 f(x,y) > 0$$

$$\forall x \in \mathbf{Z}^n, \exists y \in \mathbf{R}^m, \text{ such that } \nabla_y f(x,y) = 0$$

$$g(x) := f(x, \phi(x)) \text{ が } \mathrm{M}^\natural/\mathrm{L}^\natural \text{凸関数.}$$

を満たすとき，ハイブリッド $\mathrm{M}^\natural$/$\mathrm{L}^\natural$ 凸関数と呼ぶ．

2.3 最適性条件

ハイブリッド $\mathrm{M}^\natural$/$\mathrm{L}^\natural$ 凸関数に対する最適化問題に対する最適性条件は，以下の定理で与えられる．ただし，関数 $\phi(x)$ を方程式 $\nabla_y f(x,y) = 0$ の陰関数として，$g(x) := f(x, \phi(x))$ とする．

定理 (ハイブリッド $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数の最適性条件)：

関数 f はハイブリッド $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数であるとする．このとき，次の同値性が成り立つ．

$$f(x^*, y^*) \le f(x,y), \quad \forall x \in \mathbf{Z}^n, \forall y \in \mathbf{R}^m$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla_y f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*) \le g(x^* - \chi_u + \chi_v) \quad (\forall u, v \in V) \\ g(x^*) \le g(x^* \pm \chi_v) \quad (\forall v \in V) \end{cases}$$

定理 (ハイブリッド $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数の最適性条件)：

関数 f はハイブリッド $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数であるとする．このとき，次の同値性が成り立つ．

$$f(x^*, y^*) \le f(x,y), \quad \forall x \in \mathbf{Z}^n, \forall y \in \mathbf{R}^m$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla_y f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*) \le g(x^* \pm \chi_X) \quad \forall X \subseteq V \end{cases}$$

現在，制約付のハイブリッド凸最適化問題について検討中である．

3 量子化データを用いたシステム同定

津村 幸治（システム情報学専攻）

3.1 背景と目的

近年，制御システムの中を流れる信号の質に着目した研究が注目されている．例えばコンピュータネットワークの高速化に伴い，それを利用した様々な機器の，高度な遠隔操作が現実化しているが，そこでは制御対象と制御器の間で交わす信号の量の軽減が重要課題となっている．同様の事情は，制御対象が複雑／大規模で，かつ不確かさが大であるといった状況においては必ず生起するものであり，制御において本質的問題であると認識

されている．

以上を背景に本研究では，制御系の動作に必要な，制御対象に関する情報量，および制御対象に与える指令信号の複雑度を，制御系を流れる信号の情報量を解析することにより厳密に求めることを最終目標としている．

最も一般的な制御系とは，対象が不確かであり，制御器が何らかの適応機構を有するものであると考えられる．その場合，制御器の構造は大きく分けて，制御対象の推定機構と，推定された対象を安定化する機構の 2 つからなる．本研究グループでは前年度において，前者の過程を純粋にシステム同定の問題として切り出し，制御対象の推定に必要な情報量を求める問題を考え，結果を導出した．一方，著者が参加する本 COE 他研究グループにおいて，後者の過程を安定化問題として切り出し，同様の結果を導出している．

3.2 これまでの結果と課題

対象の系は，SISO の離散時間 MA モデルの出力が，メモリレスの量子化器を通して観測されるものとする．入力信号列は連続値をとり既知，かつあるクラスに属するランダムな確率変数の実現としている．適用する同定手法は一般的な最小 2 乗法とする．以上の設定のもと，前年度では，量子化された入出力データを用いたシステムパラメタの推定問題において，与えられた量子化数の上界を満足し，量子化誤差の分散の最小値を達成する最適量子化器を導出する問題を考え，その厳密解を得た．本結果は厳密解であるゆえ，あらゆる分解能をもつ量子化問題に成り立つものである．しかし次に示す問題点を指摘することができる．

1: 入力信号の確率分布に対する仮定が強い．

2: 量子化におけるステップ数に制限のある問題としているが，符号化の適用が，情報量軽減の意味でより本質的である．

本年度は，以上の問題点を解決した．

3.3 問題設定と主結果

ここでは，高分解能をもつ場合の量子化問題を扱い，システムの出力 y に対する量子化ステップの濃度 $g(y)$ という概念を導入する．つまり $g(y)$ は次を満たす．

$$g(y)dy = \text{number of steps in } dy$$

その上で，つぎの形式の制約付最小問題を考える．

$$\min_g \int \mathcal{F}(g(y),\ f(y))dy$$

s.t.

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & G(y^{\min}) = 0,\ G(y^{\max}) = M \\ \text{or II)} & H(f,g) = \log M \end{array}$$

ただし $\mathcal{F}(g(y),\ f(y))$ は量子化 2 乗誤差の大きさを表す．また I) は量子化ステップの制約に対応し，II）は量子化信号を最適符合器で符合化した場合の，符号長の制約に対応する．なお，$H(f,g)$ は量子化信号のエントロピーを表す．

以上 2 つの最適化問題の解としてそれぞれ次を得る．

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{I}}(y) &= DMy^{\frac{2}{3}} f^{\frac{1}{3}}(y) \\ & \quad D:\ \text{constant} \\ g_{\mathrm{II}}(y) &= K(M)y \end{aligned}$$

3.4 考察とまとめ

得られた結果は，入力信号のあらゆる確率分布に対して，最適な量子化密度 g が得られることを示しており，前年度の課題 1) が解決されたことを示している．一方，最適化問題 II) は，最適符号化を適用した場合の符合長を制約条件としていることから，前年度の課題 2) が解決されたことを意味する．

なお，得られた結果は $u = 0$ 近傍では得られた解の誤差が大きいことがわかっている．よって誤差軽減のためには，前年度導出した厳密解を部分的に適用するといった処理が，適宜必要となると予想される．本件に関しては今後の課題としたい．また得られた結果は前年度の厳密解と同様，安定化にとって最適な量子化器とは相反する性質を有している．よって両者が混在する適応形制御システムにおいて，どのようなトレードオフを図る必要があるかという問題がある．本件も今後の課題としたい．

4 パラメータ依存線形行列不等式を解く確率的アルゴリズム

大石 泰章（数理情報学専攻）

4.1 背景

パラメータ依存線形行列不等式 (linear matrix inequality, 以下 LMI と書く) とは，

$V_0(\boldsymbol{\theta}), V_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, V_n(\boldsymbol{\theta})$ を $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ から対称行列への関数，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を変数とするときに，

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) := V_0(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^{n} x_i V_i(\boldsymbol{\theta}) \preceq O$$

で表される不等式である．ただし上の不等号は左辺の行列が半負定値であることを意味するものとする．ロバスト制御やゲインスケジュールド制御に関わる多くの問題が，上の不等式をすべての $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ について満足する $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を求める問題に帰着される．以下そのような $\boldsymbol{x}$ を求めることを，パラメータ依存 LMI を解くという．通常 $V_i(\boldsymbol{\theta})$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の非線形な関数であるが，この場合にパラメータ依存 LMI を解くことは簡単ではなかった．

Kanev *et al.* [5] の確率的アルゴリズムはパラメータ依存 LMI の求解に使うことができる．この方法は $V_i(\boldsymbol{\theta})$ が非線形の関数であっても問題にならないという顕著な性質を持つ．しかしこのアルゴリズムには次の問題があった：(1) 初期楕円体をある仮定を満たすように選ぶ必要があるが，それは容易ではない；(2) いつ繰り返しを止めればよいのか知るのが困難である；(3) 解を得るまでの繰り返しの回数は裾の重い分布をする確率変数である．

4.2　結果

以上の問題を解決するため，停止則を持つ確率的アルゴリズムを提案した．また，このアルゴリズムが以下の性質を持つことを示した．ただし S は与えられたパラメータ依存 LMI のすべての解の集合，$E^{(0)}$ はあらかじめ $\mathbb{R}^n$ 中に選んでおく初期楕円体，$\mu > 0, 0 < \epsilon < 1, 0 < \delta < 1$ はあらかじめ選んでおく 3 つの数である．

定理． 提案したアルゴリズムについて以下が成り立つ．

(a) 更新の回数は次の値以下である：

$$\bar{\ell} := \left\lceil 2(n+1) \ln \frac{\mathrm{vol}\, E^{(0)}}{\mu} \right\rceil.$$

(b) 繰り返しの回数は次の値以下である：

$$\bar{\ell} \left\lceil \left(\ln \frac{\pi^2 \bar{\ell}^2}{6\delta} \right) \Big/ \ln \frac{1}{1-\epsilon} \right\rceil.$$

(c) アルゴリズムが出力を与えずに停止するとき，集合 $E^{(0)} \cap S$ の体積は μ 以下である．

(d) アルゴリズムが出力 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ を与えて停止し，しかも出力 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ が $P\{\boldsymbol{\theta} \in \Theta : V(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{\theta}) \prec O\} > 1 - \epsilon$ を満たさない確率は δ 以下である． □

参考文献

[1] Iwasaki, T., Hara, S. and Yamauchi, H.: Dynamical System Design from a Control Perspective: Finite Frequency Positive-Realness Approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 48, No. 8, pp. 1337-1354 (August 2003).

[2] Iwasaki, T. and Hara, S.: Generalized KYP Lemma: Unified Characterization of Frequency Domain Inequalities with Applications to System Design, *Technical Report of The Univ. Tokyo*, METR2003-27 (August 2003).

[3] Iwasaki, T. and Hara, S.: Static Gain Feedback Control Synthesis with General Frequency Domain Specifications, *Technical Report of The Univ. Tokyo*, METR2003-37 (November 2003).

[4] Tsumura, T. and Maciejowski, J.: Optimal Quantization of Signals for System Identification, *Technical Report of The Univ. Cambrdige*, CUED/F-INFENG/TR445 (2002).

[5] Kanev, S., De Schutter, B. and Verhaegen, M.: An Ellipsoid Algorithm for Probabilistic Robust Controller Design, *Systems & Control Letters*, Vol. 49, No. 5, pp. 365–375 (2003).