超ロバスト幾何計算

杉原厚吉　西田徹志

情報理工学系研究科数理情報学専攻

概 要

ロバストな幾何アルゴリズムの体系化の一環として，本年度は，流れの中のボロノイ図，3 次元メッシュの細分割，3 次元メッシュの電子透かし，無反射境界などのためのアルゴリズムを設計した．

1　はじめに

幾何計算は誤差に対して脆弱である．その主な理由は，幾何アルゴリズムでは，対象の位相構造の判定に基づいて処理の分岐が起こるが，誤差によってこの判定を誤ると，ユークリッド幾何ではあり得ない状況に陥り，処理が破綻するためである．本サブプロジェクトでは，この脆弱さを克服することのできる汎用のロバスト計算法の確立をめざして，いくつかの可能性を探っている．特に，本年度は，流れの中のボロノイ図の計算法，細分割を利用した形状データ圧縮，双対構造を利用した新しい形状表現法と細分割法，SSA アルゴリズムを利用した 3 次元メッシュ電子透かし法，波のシミュレーションのための無反射境界設定法を開発した．以下にそれらをまとめる．

2　流れの中のボロノイ図

静水では速さ v で航行できるボートが流れ $f(x,y)$ の水面上を移動するとする．このボートが，水面の点 p から q へ最短経路に沿って移動するのに要する時間を p から q へのボート航行距離とよび，$d(p,q)$ で表す．点の集合 $S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ に対して，

$$R(S;p_i)=\bigcap_{j\neq i}\{p\in\mathbf{R}^2 \mid d(p_i;p)<d(p_j;p)\} \quad (1)$$

とおく．$R(S;p_i)$ は，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ に繋がれているボートのうち，p_i に繋がれているボートが最も早く行ける領域を表す．

水面は $R(S;p_1),R(S;p_2),\cdots,R(S;p_n)$ とその境界へ分割される．この分割図形を流れ f に関する流れの中のボロノイ図，またはボート航行距離ボロノイ図とよぶ．

流れ f が場所によらず一定の場合には，このボロノイ図の境界は双曲線となり，解析的にボロノイ図を構成することができる．しかし，f が場所に依存する場合には，ボロノイ図を解析的に計算することは難しく，近似計算に頼らざるを得ない．

時刻 0 にボートが点 p_0 にいるものとし，このボートの点 $p=(x,y)$ までの到達時間を $T(x,y)$ とする．ボートが最短経路に沿って進み，時刻 t では (x,y) を通過し，時刻 $t+\delta t$ では $(x+\delta x,y+\delta y)$ を通過するものとする．すなわち

$$T(x+\delta x,y+\delta y)-T(x,y)=\delta t \quad (2)$$

であるとする．

ボートは微少時間 δt の間に，自力では曲線 $T(x,y)=t$ に垂直な方向へ $v\delta t$ だけ進み，その間に流れによって $f\delta t$ だけ流されるから

$$\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix}=\frac{\nabla T}{|\nabla T|}v\delta t+f\delta t \quad (3)$$

が成り立つ．式 (2) をテイラー展開すると

$$\begin{aligned}&T(x+\delta x,y+\delta y)\\ &=T(x,y)+\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial y}\delta y+\mathrm{O}(\delta x^2+\delta y^2)\quad (4)\end{aligned}$$

となる．したがって，式 (2) と式 (4) より，十分小さな δt に対しては

$$\delta t = \nabla T \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \tag{5}$$

である．

一方，$f = (g, h), \nabla T = (T_x, T_y)$ とおくと，式 (3) は

$$\delta x = \frac{T_x}{|\nabla T|} v\delta t + g\delta t, \tag{6}$$

$$\delta y = \frac{T_y}{|\nabla T|} v\delta t + h\delta t \tag{7}$$

となる．(5)，(6)，(7) より

$$\begin{aligned} \delta t &= T_x \delta x + T_y \delta y \\ &= \frac{{T_x}^2}{|\nabla T|} v\delta t + \frac{{T_y}^2}{|\nabla T|} v\delta t + (T_x g + T_y h)\delta t \end{aligned} \tag{8}$$

となる．この式の両辺を δt で割って整理すると

$$|\nabla T| v + \nabla T \cdot f = 1 \tag{9}$$

が得られる．これが T が満たすべき偏微分方程式である．

このように，点 p_0 から各点 $p = (x, y)$ までのボート航行距離は，時間を含まない偏微分方程式 (9) を $T(q_0) = 0$ という境界条件のもとで解くことによって求めることができる．

この方程式は eikonal 方程式に似ており，eikonal 方程式は高速前進法で効率よく安定に解くことができるので，その方法を適用してみたがうまくいかなかった．検討の結果，その主な理由は，高速前進法によって格子点の値を求める順序が，ボートの到達時刻の順序と逆転することがあるためであることがわかった．

そこで，高速前進法に対していくつかの改良を試みた．その第一は，ボートの到達時間を表す関数が局所的には錐体の形となることを利用して，それぞれの場所でこの錐体を補間し，それを積み重ねる計算法である [10]．これは，場合分けが多くなるが，ある程度安定に計算が進むことが確認できた．

第二の方法は，高速前進法が差分型解法であるのに対して，有限要素法による定式化を用いるものである [11]．特に 2 次の三角形要素を用いた方法が，非常にロバストであることがわかった．

第三に，高速前進法からは離れて，粒子追跡法も構成した．通常の粒子追跡法では，隣り合った粒子の差から $T(x, y) = \text{const.}$ に対する法線方向を推定するが，方程式 (9) の解は特異点をもつために，この法線方向の計算は不安定である．そこで，隣りの粒子との差をとることはやめて，方程式 (9) よりそれぞれの粒子の法線方向の変化も直接推定する方法を作った．これも安定に動作することが確認できた．

今後は，この計算法を航空機の航路の最適化などに応用していきたい．

3　細分割を利用したメッシュデータ圧縮

三角形メッシュで表された立体情報の新しい圧縮法を構成した．これは，細分割によって粗い立体から滑らかな立体が得られることを利用して，細分割後の滑らかな立体が与えられた立体に近くなるようにもとの粗い立体を調整し，その粗い立体を圧縮されたデータ表現とみなすものである [2, 3]．

ただし，細分割によって得られメッシュは，その頂点と辺がなす位相構造が限定されている．一般の三角形メッシュをそれにあてはめるために，まず与えられた立体を星状形に分割し，その核から出る半直線が立体表面とちょうど 1 回交わることを利用して各星状形と細分割面の一対一対応をとった．これによって，任意の位相構造をもったメッシュの圧縮がロバストにできるようになった．

4　メッシュデータのための電子透かし

立体を表す三角形メッシュデータの著作権保護のための電子透かしの新しい方法を構成した．電

子透かしは，データに作者などの情報を埋め込む技術である．ここでは，もとのデータの品質を損なわないこと，透かしが容易には分離できないことなどが要求される．

まず，特異値スペクトル解析 (SSA) アルゴリズムを利用した電子透かし法を構成した [7, 8]．SSA は時系列の自己相関をとる方法であるが，それが使えるように，メッシュの頂点に順序を導入し，その順序に並んだ頂点を時系列として扱う．そして，この時系列のスペクトル分解の各項に透かしを埋め込む．

単純に埋め込んだ透かしは，立体の座標変換などに対して弱いものであったが，透かしを埋め込む際の秘密鍵の任意性を利用して，メッシュの重心がなるべく動かない埋め込み法を採用した．その結果，透かしがロバストに埋め込めるようになった．

さらに，頂点に強制的に 1 列の順序を与えることが不自然であるという反省のもとに，情報の 2 次元的広がりがそのまま利用できるように SSA アルゴリズムを拡張した．この拡張によって，スペクトルの取り方に大きな自由度が得られたが，本研究では特に，メッシュの各頂点のまわりで円環状に頂点を並べてその重心の変化をとらえるという方式を採用した．そして，その有効性も確認できた [9]．

5 無反射境界条件の設定法

波の挙動をシミュレートする際に，無限に広がった実空間を計算機の中では有限領域で近似するために，無反射境界条件が必要となる．そのための新しい方法を構成した．従来は波が境界に垂直であるという粗い仮定をして，それが反射しない条件を課していた．しかし，実際の波は境界に垂直であるとは限らない．このことを反省し，波の方向を局所的に計算するとともに，それを境界に垂直な成分とそれ以外に分解した上で，垂直な成分を無反射にする方法を構成した．その有効性について，現在検討中である．

6 その他の幾何計算

そのほかにも，3 面頂点メッシュの表現法 [12]，不規則メッシュの上での地形補間法 [6]，ボロノイ図を利用したスポーツチームワーク解析 [13]，円ボロノイ図の構成法 [4, 5]，ボロノイ図を利用した 2 次元探索法 [1] などの成果が得られた．

7 超ロバスト幾何セミナー

また，国際拠点作りの一環として，次の 5 回のセミナーを開催した．

1. Myung-Soo Kim: Applications of Ellipsoids in Geometric Modeling and Processing. 2003 年 7 月 18 日.
2. Emmerich Simoncsics: How to Learn Japanese with Fun. 2003 年 10 月 7 日.
3. Chee Yap: Complete Subdivision Algorithm for Intersecting Elementary Bezier Curves. 2004 年 2 月 4 日.
4. Chee Yap: Theory of Guaranteed Accuracy Computation. 2004 年 2 月 6 日.
5. Deok-Soo Kim: Voronoi Diagram for Spheres and Its Applications. 2004 年 2 月 6 日.

8 国際シンポジウムの準備

超ロバスト計算に関する国際拠点作りの一環として，幾何計算に関する次の国際シンポジウムを開催することを決定し，その準備を始めている．

International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering, September 13–15, 2004, University of Tokyo.

発表

[1] Takeshi KANDA and Kokichi SUGIHARA, Two-dimensional range search based on the Voronoi daigram, V. Kumar, M. L.

Gavrilova, C. J. K. Tan and P. L'Ecuyer (eds.): Computational Science and Its Applications – ICCSA 2003, Part III, Lecture Notes in Computer Science 2669, (International Conference, Montreal, Canada, Proceedings), pp. 776–786, May, 2003.

[2] Hiroshi KAWAHARADA and Kokichi SUGIHARA, Mesh data compression based on star-shape decomposition, ISM Symposium on Statistics, Combinatorics and Geometry p. 8, March 20-22, 2003, Tokyo.

[3] Hiroshi KAWAHARADA and Kokichi SUGIHARA, Compression of arbitrary mesh data using subdivision spheres, The 10th IMA Conference on the Mathematics of Surfaces, Leeds, UK, September 15-17, 2003.

[4] Deok-Soo KIM, Donguk KIM and Kokichi SUGIHARA, Voronoi diagram of circles in a large circle, V. Kumar, M. L. Gavrilova, C. J. K. Tan and P. L'Ecuyer (eds.): Computational Science and Its Applications – ICCSA 2003, Part III, Lecture Notes in Computer Science 2669, (International Conference, Montreal, Canada, Proceedings), pp. 847–855, May, 2003.

[5] Donguk KIM, Kwangseok YU, Deok-Soo KIM and Kokichi SUGIHARA, Voronoi diagram of circles and its applications, SIAM Conference on Geometric Design and Computing, November 10-13, 2003.

[6] Kohei MUROTANI and Kokichi SUGIHARA, Globally smooth interpolation using Gregory patches over irregular meshes, International Journal on Shape Modeling, Vol. 9, No. 1, pp. 21–39, 2003.

[7] Kohei MUROTANI and Kokichi SUGIHARA, Watermarking 3D polygonal meshes using the singular spectrum analysis, ISM Symposium on Statistics, Combinatorics and Geometry p. 7, March 20-22, 2003, Tokyo.

[8] Kohei MUROTANI and Kokichi SUGIHARA, Watermarking 3D polygonal meshes using the singular spectrum analysis, The 10th IMA Conference on the Mathematics of Surfaces, Leeds, UK, September 15-17, 2003.

[9] 室谷浩平，杉原厚吉: SSA アルゴリズムを用いた 3 次元多角形メッシュへの電子透かしの埋め込み，2004 年暗号と情報セキュリティシンポジウム (SCIS2004)，2004 年 1 月 27 日〜30 日.

[10] Tetsushi NISHIDA and Kokichi SUGIHARA, Voronoi diagram in the flow field, T. Ibaraki, N. Katoh and H. Ono (eds.): Algorithms and Computation, 14th International Symposium, ISAAC 2003 (Lecture Notes in Computer Science 2906), pp. 26–35, 2003.

[11] 西田徹志，杉原厚吉: FEM Fast Marching Method によるボート航行距離の計算, 情報処理学会アルゴリズム研究会研究報告, 2004-AL-93, pp. 105–112, 2004.

[12] Lluis ROS, Kokichi SUGIHARA and Federico THOMAS, Shape representation using trihedral mesh projections, Visual Computer, Vol. 19, Issue 2-3, pp. 139–150, 2003.

[13] Kokichi SUGIHARA, Akira FUJIMURA and Tetsushi NISHIDA, Evaluation of sport teamwork based on Voronoi diagrams, ISM Symposium on Statistics, Combinatorics and Geometry p.10, March 20-22, 2003, Tokyo.